Introducción a las Operaciones Financieras

Juan Carlos Mira Navarro

Introducción a las Operaciones Financieras

Juan Carlos Mira Navarro

Publicado por: Juan Carlos Mira Navarro
www.emodulos.com

(CC) 2013-22, Juan Carlos Mira Navarro

Versión 1.6.18 (marzo 2022)

creative commons
COMMONS DEED
Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 2.5 España
texto legal (la licencia completa)

a Margarita

Presentación

Estos apuntes, están orientados a quien estudia las operaciones financieras. El objetivo principal, es aprender matemáticas financieras haciéndolas, así como cubrir el contenido del módulo de *gestión financiera* en el Ciclo de Grado Superior de Administración y Finanzas y la asignatura de *matemáticas de las operaciones financieras* en el grado de Administración y Dirección de Empresas.

Cada unidad contiene un amplio conjunto de problemas. Algunos, incluyen cálculos rutinarios y están ideados como ayuda a dominar nuevas técnicas. Otros exigen aplicar las nuevas técnicas a situaciones prácticas.

He evitado por tanto «la teoría por la teoría». Hay muchos y buenos textos dedicados a esta materia como puede verse en la bibliografía. Sin embargo, los principales resultados, he procurado enunciarlos de forma completa y cuidada. La mayoría de ellos están explicados o justificados. Siempre que es posible, las explicaciones son informales o intuitivas y se realizan una sola vez. Hay un apéndice de introducción matemática que recuerda algunas cuestiones precisas para el estudio de la gestión financiera. Igualmente he pretendido crear un índice alfabético exhaustivo.

El empleo de tablas financieras fue la primera ayuda con la que se pudo contar para resolver un problema de matemáticas financieras. Desde ellas hasta la introducción de la primera calculadora financiera, la HP80, por Hewlett-Packard en 1972 y así hasta que Dan Bricklin concibiera la primera hoja de cálculo «Visicalc» en 1978 que comerciara Apple, ha pasado mucho tiempo.

En la actualidad el empleo de las calculadoras y hojas de cálculo en los ordenadores personales es muy habitual y facilita enormemente el trabajo, además de reducir el número de errores. Sin embargo, hay que señalar que aunque la informática resuelve problemas de cálculo, no soluciona la necesidad de dominar primero la materia. Su conocimiento por tanto no lo puede suplir el ordenador.

En la resolución de muchos ejercicios se utiliza una calculadora financiera (la HP12c). Puede utilizarse una HP12c *online* o descargar la extensión Chrome para el navegador Edge, o el emulador.

Igualmente, para otros, he utilizado la hoja de cálculo (Excel, Calc o Numbers). Hoy en día, deben ser herramientas habituales para el estudiante y trabajador de este área matemática. En la página dedicada al módulo, puede obtenerse un emulador de la calculadora financiera HP10bii+ o de la HP12c para Windows. También puede descargarse el paquete ofimático que contiene la hoja de cálculo Calc de LibreOffice o OpenOffice.

No obstante, estos apuntes, no pretenden ser un texto de utilización independiente, sino complementarios a las clases y que junto con la página web [http://www.emodulos.com] y las presentaciones permitan el estudio del módulo.

La mayor parte del material utilizado para este documento procede de elaboración propia tomada de los apuntes utilizados para las clases. En este sentido,

tengo que agradecer a mis alumnos la colaboración para la corrección de los ejercicios, y en general el entendimiento de los apuntes.

En la primera parte, la unidad 1 pretende introducir el concepto de capital financiero y equivalencia financiera haciendo además una clasificación de las operaciones financieras. En las unidades 2 a 4, se describen las leyes financieras clásicas de capitalización y descuento tanto simple como compuesta. Igualmente se tratan las operaciones a corto plazo más comunes en el ámbito empresarial (descuento bancario, cuentas corrientes, de crédito, etc.)

En las unidades 5 y 6 se desarrollan las rentas financieras basadas en la ley de capitalización compuesta discretas y fraccionadas, estudiando tanto la constitución de capitales como las operaciones de amortización. Igualmente se analizan diversos métodos para la obtención del tipo de interés y el conocimiento de la TIR, así como la evaluación de operaciones financieras. Las unidades 7 y 8 estudian la constitución de capitales, los préstamos tipo y métodos particulares de financiación actuales así como los empréstitos como medio de canalización del ahorro e inversión.

La unidad 9 es una introducción a los títulos valores tanto de renta fija como variable en la que se aplican los conceptos financieros aprendidos en las unidades anteriores.

A pesar de haberlo revisado varias veces ;-), evidentemente existirán errores y faltarán datos que podrían haber aparecido, por lo que agradeceré cualquier sugerencia o crítica (constructiva).

Como curiosidad, el texto ha sido escrito íntegramente con `Vim`. `VI(M)` es EL editor, el resto de editores no son vi :-), y compuesto utilizando únicamente TEX y LATEX. Los gráficos se han realizado con `PSTricks`.

Alicante, agosto de 2013

Se han hecho pequeñas correcciones por erratas. Además, se han completado algunas unidades mejorando las exposiciones y aumentado los ejemplos ilustrativos.

En el anexo matemático, se ha incluido un recordatorio de la resolución de sistemas de dos y tres ecuaciones, así como ecuaciones de 2.º grado.

Alicante, marzo de 2020

Al final de cada unidad, se ha añadido la solución paso a paso de muchos de los ejercicios propuestos intentando que la resolución se ajuste a una metodología sencilla e intuitiva tal como se ha desarrollado en la unidad.

Tanto en los ejemplos como en algunos de los ejercicios, se incluye la solución utilizando la calculadora HP12c. En este caso, se supone que inicialmente en la calculadora, se han borrado los registros financieros y se trabaja en el modo pospagable, es decir:

f CLEAR FIN	Se borran todos los registros financieros
g END	Se activa el modo pospagable END para los cálculos.

Alicante, mayo 2021

Pequeñas correcciones en el solucionario de los ejercicios de algunas unidades.

Alicante, mayo 2022

Índice general

Presentación **v**

1. Conceptos básicos **1**
1.1. El fenómeno financiero. Capital financiero 2
1.2. Operación financiera 2
1.3. Equivalencia financiera 4
1.3.1. Principio de sustitución o proyección financiera 4
1.3.2. Criterio de proyección financiera: leyes financieras 5
1.4. Clasificación de las operaciones financieras 5

2. Capitalización y descuento simple **7**
2.1. Capitalización simple o interés simple 8
2.1.1. Magnitudes derivadas 9
2.2. Intereses anticipados 10
2.3. Cálculo de los intereses simples. Métodos abreviados 10
2.3.1. Método de los multiplicadores fijos 10
2.3.2. Método de los divisores fijos 11
2.4. Descuento simple comercial 11
2.4.1. Magnitudes derivadas 11
2.5. Cálculo del descuento simple. Métodos abreviados 12
2.5.1. Método de los multiplicadores fijos 12
2.5.2. Método de los divisores fijos 12
2.6. Descuento simple racional o matemático 13
2.6.1. Tanto de interés equivalente a uno de descuento 13
Ejercicios propuestos 14
Resolución de los ejercicios propuestos 16

3. Operaciones a corto plazo **19**
3.1. Introducción 20
3.2. Crédito comercial 20
3.3. Descuento bancario 21
3.3.1. Descuento de efectos comerciales 21
3.3.2. Descuento financiero 25
3.4. Cuentas corrientes 25
3.4.1. Métodos para obtener el saldo 26
3.4.2. Método directo 27
3.4.3. Método indirecto 27
3.4.4. Método hamburgués 27
3.4.5. Cuentas corrientes a interés recíproco y variable 27
3.4.6. Cuentas corrientes a interés no recíproco 28
3.5. Cuentas corrientes bancarias a la vista 28
3.6. Cuentas de ahorro 29
3.7. Créditos en cuenta corriente 30
3.8. Equilibrio financiero. Reserva matemática o saldo financiero . . . 30
3.8.1. Vencimiento común. Vencimiento medio 31

3.9. Otros activos financieros 32
3.9.1. Tesoro Público. Letras del Tesoro 32
Ejercicios propuestos 33
Resolución de los ejercicios propuestos 36

4. Capitalización y descuento compuesto **39**
4.1. Capitalización compuesta 40
4.1.1. Magnitudes derivadas 41
4.2. Comparación entre la capitalización simple y compuesta 42
4.3. Equivalencia de tantos en capitalización compuesta 43
4.4. Capitalización compuesta en tiempo fraccionario 45
4.4.1. Convenio exponencial 45
4.4.2. Convenio lineal 45
4.5. Capitalización continua 46
4.6. Descuento compuesto 47
4.6.1. Descuento racional compuesto 47
4.6.2. Descuento comercial compuesto 47
4.6.3. Tanto de interés equivalente a uno de descuento 48
Ejercicios propuestos 48
Resolución de los ejercicios propuestos 51

5. Rentas financieras **55**
5.1. Concepto de renta 56
5.2. Clasificación de las rentas 56
5.3. Valor capital o financiero de una renta 57
5.4. Renta constante, inmediata, pospagable y temporal 58
5.4.1. Valor actual 58
5.4.2. Valor final 59
5.5. Renta constante, inmediata, prepagable y temporal 61
5.5.1. Valor actual 61
5.5.2. Valor final 61
5.6. Rentas perpetuas 63
5.6.1. Valor actual 63
5.7. Rentas diferidas en p períodos de rédito constante 64
5.7.1. Valor actual 64
5.8. Rentas anticipadas en h períodos de rédito constante 66
5.9. Determinación de n e i en las rentas de rédito constante 66
5.9.1. Estudio del valor actual como función de n 66
5.9.2. Estudio del valor actual como función de i 67
Ejercicios propuestos 68
Resolución de los ejercicios propuestos 72

6. Rentas fraccionadas y variables **75**
6.1. Introducción 76
6.2. Rentas con fraccionamiento uniforme 76
6.2.1. Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas 79
6.3. Ecuación de las rentas constantes, inmediatas y temporales . . . 79
6.4. Rentas de términos variables en progresión geométrica 79
6.4.1. Renta pospagable temporal 80
6.4.2. Renta pospagable perpetua 81
6.4.3. Renta prepagable temporal 81
6.4.4. Renta prepagable perpetua 81
6.4.5. Renta diferida y anticipada 82
6.5. Rentas de términos variables en progresión aritmética 82
6.5.1. Renta pospagable temporal 82
6.5.2. Renta pospagable perpetua 83
6.5.3. Renta prepagable temporal 83

6.5.4. Renta prepagable perpetua . . . 84
6.5.5. Renta diferida y anticipada . . . 84
6.6. Rentas variables fraccionadas . . . 85
6.6.1. Rentas variables fraccionadas en progresión geométrica . . 85
6.6.2. Rentas variables fraccionadas en progresión aritmética . . 85
6.7. Rentas variables en general con rédito periodal constante . . . 86
6.7.1. Criterios de selección de inversiones . . . 86
6.7.2. Valor capital . . . 87
6.7.3. La tasa de retorno . . . 87
6.7.4. Determinación de i. Método de Newton . . . 88
6.7.5. Hoja de cálculo . . . 90
6.7.6. Simplificación de Schneider . . . 92
Ejercicios propuestos . . . 93
Resolución de los ejercicios propuestos . . . 98

7. Operaciones de constitución. Préstamos 103
7.1. Operación de constitución . . . 105
7.1.1. Elementos de la constitución . . . 105
7.1.2. Constitución de un capital mediante imposiciones constantes 105
7.2. Prestamos: conceptos básicos. Clasificación . . . 107
7.2.1. Elementos de un préstamo . . . 108
7.2.2. El tipo de interés. Componentes . . . 108
7.2.3. Clasificación . . . 109
7.3. Préstamos amortizables con reembolso único . . . 109
7.3.1. Reembolso único . . . 109
7.3.2. Reembolso único con fondo de amortización . . . 111
7.3.3. Reembolso único y pago periódico de intereses. Préstamo americano . . . 111
7.4. Préstamo francés . . . 112
7.4.1. Anualidad . . . 113
7.4.2. Capital pendiente . . . 114
7.4.3. Cuotas de amortización . . . 114
7.4.4. Capital amortizado, cuotas de interés . . . 114
7.4.5. El cuadro de amortización . . . 115
7.5. Tanto efectivo para el prestatario . . . 116
7.6. Amortización con términos variables en progresión geométrica . . 118
7.7. Amortización con términos variables en progresión aritmética . . 119
7.8. Amortización de cuota de capital constante. Método italiano . . 119
7.9. Préstamo alemán o «anticipativenzisen» . . . 120
7.10. Amortización con intereses fraccionados . . . 122
7.11. Carencia e interés variable . . . 122
7.11.1. Carencia . . . 122
7.11.2. Tipo de interés variable . . . 123
7.12. Valor financiero del préstamo, del usufructo y de la nuda propiedad 123
7.12.1. Caso particular. La fórmula de Achard . . . 124
7.12.2. Aplicación a los métodos de amortización más utilizados . 125
Ejercicios propuestos . . . 126
Resolución de los ejercicios propuestos . . . 130

8. Financiación de la empresa 135
8.1. La financiación externa de la empresa . . . 136
8.1.1. Las deudas empresariales a largo plazo . . . 136
8.1.2. Las deudas empresariales a medio plazo . . . 136
8.1.3. Las deudas empresariales a corto plazo . . . 136
8.2. Arrendamiento financiero o «Leasing» . . . 137
8.2.1. Valoración . . . 137
8.3. Empréstitos. Introducción . . . 139

8.3.1. Empréstitos sin cancelación escalonada 140
8.3.2. Empréstitos con cancelación escalonada 140
8.3.3. Problemática de los empréstitos 140
8.3.4. Elementos que intervienen en los empréstitos 141
8.4. Empréstito normal. Método francés 141
8.5. Empréstito de cupón cero 144
Ejercicios propuestos 145
Resolución de los ejercicios propuestos 147

9. Títulos valores: operaciones bursátiles 149
9.1. Títulos valores: valores mobiliarios 150
9.2. Títulos valores: conceptos 151
9.3. Mercado de valores 152
9.4. Rentabilidad de los títulos valores 152
9.5. Valoración de los títulos valores 154
9.6. Valoración de los títulos de renta fija 154
9.6.1. Compra por suscripción y mantenimiento hasta su amortización 155
9.6.2. Compra por suscripción y venta del título en el mercado . 155
9.6.3. Compra en el mercado y mantenimiento hasta su amortización 156
9.6.4. Compra en el mercado y venta en el mercado 156
9.7. Valoración de las acciones 157
9.7.1. Valoración en función de los dividendos 157
9.7.2. Valoración en función de los beneficios 159
9.8. Valoración de las letras financieras 160
9.8.1. Adquisición inicial y mantenimiento hasta su vencimiento 160
9.8.2. Adquisición inicial y venta en el mercado secundario . . . 161
9.8.3. Adquisición de la letra en el mercado secundario 161
Ejercicios propuestos 162
Resolución de los ejercicios propuestos 163

A. Introducción matemática 165
A.1. Razones y proporciones 166
A.1.1. Razones 166
A.1.2. Proporciones 168
A.2. Porcentajes 168
A.3. Logaritmos decimales 168
A.4. Interpolación lineal 169
A.5. Progresiones aritméticas 170
A.5.1. Suma de términos equidistantes de los extremos 171
A.5.2. Término medio 171
A.5.3. Suma de los términos de una progresión aritmética limitada 171
A.6. Progresiones geométricas 172
A.6.1. Producto de dos términos equidistantes de los extremos . 172
A.6.2. Término medio 172
A.6.3. Producto de los términos de una progresión geométrica limitada 173
A.6.4. Suma de los términos de una progresión geométrica limitada 173
A.7. Resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas . 174
A.7.1. Método de sustitución 174
A.7.2. Método de reducción 175
A.7.3. Método de igualación 175
A.8. Resolución de ecuaciones lineales con tres incógnitas 176
A.8.1. Método de reducción 176
A.8.2. Método de sustitución 176
A.9. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita . . 177

B. Tablas financieras **179**
B.1. Factor de capitalización compuesta unitaria 180
B.2. Factor de descuento compuesto unitario 182
B.3. Valor actual de una renta unitaria 184
B.4. Valor final de una renta unitaria 186

Bibliografía **189**

Índice alfabético **190**

Índice de figuras

1.1. Línea del tiempo 2
1.2. Capital financiero 2
1.3. Prestación 3
1.4. Contraprestación 3
1.5. Diagrama de flujo de fondos 3
1.6. Proyección financiera 4
1.7. Capitalización 5
1.8. Descuento 5

2.1. Capitalización simple 8
2.2. Descuento simple 11
2.3. Campo de validez 12

3.1. Cuenta corriente 26

4.1. Capitalización compuesta 40
4.2. Acumulación de intereses en la capitalización compuesta 41
4.3. Comparación entre la capitalización simple y compuesta 42
4.4. Equivalencia de tantos 44

5.1. Valor actual de una renta financiera 57
5.2. Valor actual de una renta unitaria 58
5.3. Valor final de una renta unitaria 59
5.4. Valor actual de una renta unitaria prepagable 61
5.5. Relación entre una renta unitaria prepagable y pospagable 62
5.6. Valor actual de una renta unitaria diferida 64
5.7. Estudio de n 67
5.8. Estudio de i 68

6.1. Valor actual de una renta unitaria fraccionada 77
6.2. Método de Newton. Determinación de i 89

7.1. Constitución de capital 106
7.2. Préstamo francés 113
7.3. Amortización del préstamo francés 113

1

Conceptos básicos

1.1. El fenómeno financiero. Capital financiero
1.2. Operación financiera
1.3. Equivalencia financiera
1.3.1. Principio de sustitución o proyección financiera
1.3.2. Criterio de proyección financiera: leyes financieras
1.4. Clasificación de las operaciones financieras

1.1. El fenómeno financiero. Capital financiero

En una primera interpretación se consideró el tiempo como una magnitud pasiva o neutra sin influencia en los hechos económicos. Más adelante se empezó a tomar la magnitud tiempo como una variable exógena que interviene en el fenómeno económico.

Todo sujeto económico prefiere los bienes presentes sobre los futuros a igualdad de cantidad y calidad, y ello significa que *el tiempo influye en la apreciación de los bienes económicos.*

Entre dos bienes que sirven para satisfacer la misma necesidad, pero están disponibles en tiempos distintos, es preferido el bien más próximo. Por eso, el tiempo es un *bien económico negativo.*

Como consecuencia de estas premisas, surge la necesidad de identificar los bienes económicos con un par de números (C, t), en el que C indica la cuantía o medida objetiva del bien en unidades monetarias y t expresa el momento del tiempo al que va referida dicha medida o valoración, llamado momento de disponibilidad o vencimiento de la cuantía.

El *fenómeno financiero* es todo hecho económico en el que intervienen capitales financieros, es decir, en el que interviene y se considera el tiempo como un bien económico.

Consecuencia de ello, *el principio básico de la preferencia de liquidez* identifica los bienes económicos como una cuantía referida al momento de su disponibilidad. Se denomina *capital financiero* a la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad o vencimiento.

$$(C, t) \text{ siendo } C \in \mathbb{R}^+ \text{ y } t \in \mathbb{R}^-$$

El diagrama parte de una línea horizontal, tal como se muestra en la figura 1.1 denominada línea de tiempo, que representa la duración de un problema financiero y está dividida en n períodos de capitalización de igual duración (longitud).

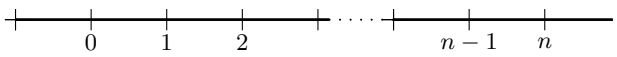


Figura 1.1: Línea del tiempo

La expresión gráfica la hacemos por un punto del plano con referencia a un sistema de coordenadas cartesianas.

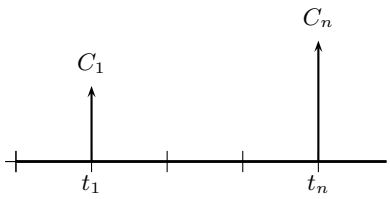


Figura 1.2: Capital financiero

1.2. Operación financiera

La *operación financiera* es toda acción que intercambia o sustituye unos capitales financieros por otros de distinto vencimiento, mediante la aplicación de una determinada ley financiera en un punto de referencia.

La mayor parte de los fenómenos financieros, o son operaciones financieras o son asimilables a operaciones financieras más o menos imperfectas.

Se denomina *origen* de la operación al punto donde vence el primer capital y *final* al momento de vencimiento del último capital. La diferencia entre ambos vencimientos es la *duración*.

La persona que entrega el primer capital inicia la operación como acreedora, y a su compromiso total se le denomina *prestación*. Por el contrario, la persona que recibe ese primer capital es inicialmente deudora, y a su compromiso total se le designa *contraprestación*.

El *postulado de equivalencia financiera* establece que «toda operación financiera implica la existencia de una equivalencia financiera entre las sumas de los capitales que componen la prestación y la contraprestación, en base a una ley financiera previamente fijada y aceptada por ambas partes».

Una operación financiera deberá cumplir las condiciones siguientes:

- Que el intercambio no sea simultáneo.
- Que esté actuando en el intercambio una ley financiera que haga que la prestación y contraprestación sean equivalentes financieramente.

En definitiva, cualquier operación financiera se reduce a un conjunto de flujos de caja (cobros y pagos) de signo opuesto y distintas cuantías que se suceden en el tiempo.

Por ejemplo, si A cede unos capitales (C_1, t_1), (C_2, t_2) y (C_3, t_3) a B (préstamo), y como contraprestación, B, devuelve a A los capitales (C_4, t_4) y (C_5, t_5). La representación gráfica, sería:

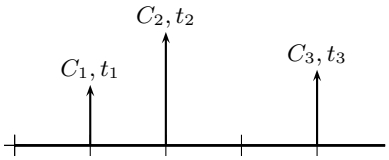


Figura 1.3: Prestación

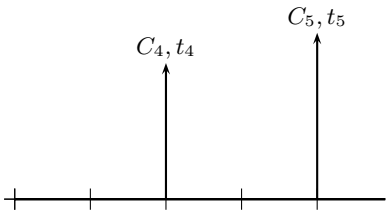


Figura 1.4: Contraprestación

Los movimientos de dinero están simbolizados por flechas verticales. El dinero recibido se indica con una flecha con la punta hacia arriba (positivo) de la línea que representa el lapso de la operación, y el dinero pagado con una flecha que apunta hacia abajo (negativo).

Otra forma de representación muy común, por su comodidad, es utilizando solo la parte superior del eje. Para ello, el dinero recibido se representa con una flecha y el dinero pagado con un segmento tal como se muestra en la figura 1.5.

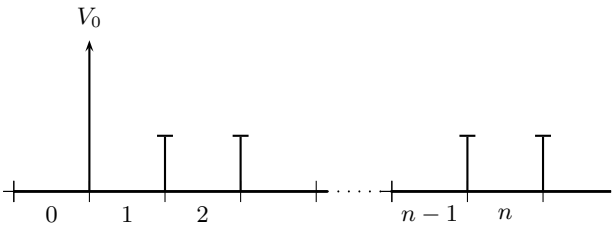


Figura 1.5: Diagrama de flujo de fondos

El monto de pago periódico (C, t) representa una serie de movimientos de dinero de la misma dirección y magnitud. En el diagrama de flujo de fondos típico los pagos coinciden con los períodos de capitalización y son igual al número de períodos.

1.3. Equivalencia financiera

1.3.1. Principio de sustitución o proyección financiera

«El sujeto económico es capaz de establecer un criterio de comparación entre capitales de una forma indirecta a través de la proyección o valoración en un punto de referencia p».

Es decir, existe un criterio para el que un capital (C, t) obtiene la cuantía V del capital sustituto en p, y ello, tanto para $t > p$ como para $t < p$. V, se expresa:

$$V = Proy_p\,(C, t)$$

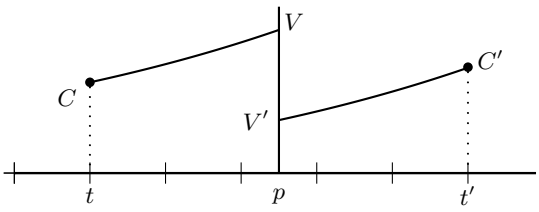


Figura 1.6: Proyección financiera

Asociado a este criterio de *proyección financiera*, se obtiene la *relación de equivalencia financiera en p*, $\widetilde{p}$, definida como «dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2) son equivalentes cuando tienen el mismo sustituto o proyección V en p».

$$\left[(C_1, t_1)\,\widetilde{p}\,(C_2, t_2)\right] \Rightarrow \left[Proy_p\,(C_1, t_1) = Proy_p\,(C_2, t_2)\right]$$

y verifica las propiedades:

reflexiva $\quad (C_1, t_1)\,\widetilde{p}\,(C_1, t_1)$

simétrica $\quad (C_1, t_1)\,\widetilde{p}\,(C_2, t_2) \Rightarrow (C_2, t_2)\,\widetilde{p}\,(C_1, t_1)$

transitiva $\quad \left.\begin{array}{l}(C_1, t_1)\,\widetilde{p}\,(C_2, t_2)\\ (C_2, t_2)\,\widetilde{p}\,(C_3, t_3)\end{array}\right\} = (C_1, t_1)\,\widetilde{p}\,(C_3, t_3)$

Se denomina *origen* de la operación al punto donde vence el primer capital, y *final* al momento de vencimiento del último capital. La diferencia entre ambos vencimientos es la *duración*.

La persona que entrega el primer capital, inicia la operación como acreedora, y a su compromiso total se le denomina *prestación*. Por el contrario, la persona que recibe ese primer capital es inicialmente deudora, y a su compromiso total se le denomina *contraprestación*.

Una *operación financiera* es, pues, un intercambio no simultáneo de capitales financieros, entre dos personas, que lleva implícita una equivalencia entre el valor de los mismos respecto de un punto de referencia en base a una ley financiera previamente fijada y aceptada por ambas partes.

El principio de proyección financiera en p permite también definir una relación de orden $\precsim_{\widetilde{p}}$ denominada *relación de preferencia financiera*.

Dados dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2) diremos que (C_2, t_2) es preferible o indiferente a (C_1, t_1) si se verifica que $V_2 = Proy_p\,(C_2, t_2)$ es mayor o igual a $V_1 = Proy_p\,(C_1, t_1)$, es decir:

$$\left[(C_1, t_1)\,\overset{\preceq}{p}\,(C_2, t_2)\right] \Leftrightarrow \left[Proy_p\,(C_1, t_1) \leq Proy_p\,(C_2, t_2)\right]$$

La relación así definida, verifica también las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

1.3.2. Criterio de proyección financiera: leyes financieras

La expresión o modelo matemático del criterio de proyección financiera que para todo (C, t) permite obtener V fijado p, recibe el nombre de *ley financiera aplicada en p* y se simboliza por:

$$V = F(C, t; p) = Proy_p\,(C, t)$$

siendo p un parámetro.

Cuando $t < p$, se dice que V es la cuantía en p resultado de la capitalización de (C, t), y por ello la ley, en este caso representada por $L(C, t; p)$ se denomina *ley financiera de capitalización en p*, tal como se muestra en la figura 1.7.

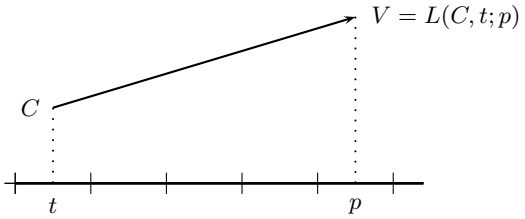


Figura 1.7: Capitalización

Si $t > p$, el valor de V es la cuantía en p resultado de la actualización o descuento de (C, t), y por ello, la ley, expresada ahora como $A(C, t; p)$ recibe el nombre de *ley financiera de descuento en p*. Puede verse en la figura 1.8.

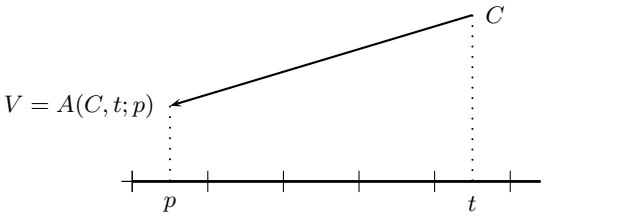


Figura 1.8: Descuento

1.4. Clasificación de las operaciones financieras

Las operaciones financieras pueden clasificarse atendiendo a distintos criterios:

1. Según la naturaleza de los capitales, podemos distinguir entre *operaciones financieras ciertas*, en las que todos los capitales que intervienen son ciertos, y *operaciones financieras aleatorias*, cuando al menos uno de ellos es de naturaleza aleatoria.

2. Respecto a la forma de su definición, pueden clasificarse en *operaciones predeterminadas o definidas ex ante*, cuando en el contrato se especifica a priori los capitales de la prestación y de la contraprestación (en términos ciertos o aleatorios), y *operaciones posdeterminadas o definidas ex post*, caracterizadas por el no conocimiento previo de las cuantías o vencimientos de todos o parte de los capitales.

3. En relación al grado de liquidez interna, denominamos *operación con liquidez interna total* cuando en las condiciones del contrato se establece el derecho a cancelar la operación en cualquier momento y *operaciones con liquidez interna parcial* si la cancelación está condicionada o requiere el acuerdo entre las dos partes.

4. En cuanto a su duración, *operaciones a corto plazo*, las que tienen una duración inferior al año (generalmente), y *operaciones a largo plazo* cuando tienen una duración superior.

5. Por los compromisos de las partes, *operaciones simples*, si la prestación y contraprestación están formadas por un solo capital. En caso contrario, *operaciones compuestas*.

6. Atendiendo al punto p de aplicación, la operación será de *capitalización*, de *descuento* o *mixta*, según que p sea respectivamente mayor o igual que el último vencimiento, menor o igual que el primero o esté comprendido entre ambos.

7. Según el sentido crediticio de la operación, de *crédito unilateral* cuando la persona que inicia la operación como acreedora, conserva este carácter hasta el final. En caso contrario, será de *crédito recíproco*.

8. Respecto a las condiciones sustantivas, si son únicas para todos los capitales, se trata de *operaciones homogéneas*. En caso contrario, reciben el nombre de *operaciones heterogéneas*.

2

Capitalización y descuento simple

2.1. Capitalización simple o interés simple
2.1.1. Magnitudes derivadas
2.2. Intereses anticipados
2.3. Cálculo de los intereses simples. Métodos abreviados
2.3.1. Método de los multiplicadores fijos
2.3.2. Método de los divisores fijos
2.4. Descuento simple comercial
2.4.1. Magnitudes derivadas
2.5. Cálculo del descuento simple. Métodos abreviados
2.5.1. Método de los multiplicadores fijos
2.5.2. Método de los divisores fijos
2.6. Descuento simple racional o matemático
2.6.1. Tanto de interés equivalente a uno de descuento
Ejercicios propuestos
Resolución de los ejercicios propuestos

2.1. Capitalización simple o interés simple

Se denomina así, a la operación financiera que tiene por objeto la constitución de un capital mediante la aplicación de la ley financiera de capitalización simple, o bien, a la que nos permite la obtención de un capital financieramente equivalente a otro, con vencimiento posterior, aplicando la citada ley financiera.

La *capitalización simple* o interés simple, es una operación financiera generalmente a corto plazo, en la que los intereses no se acumulan al capital.

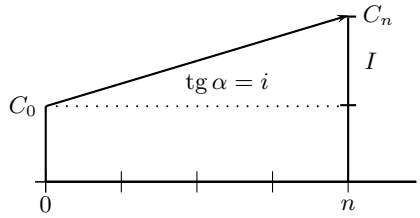


Figura 2.1: Capitalización simple

Las variables a considerar, son:

C_0 = valor actual o capital inicial,
I = intereses,
C_n = valor final o montante de la operación,
i = tasa de interés,
n = número de períodos.

En cualquier caso, n e i, han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

En la capitalización simple, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses, es decir:

$$C_n = C_0 + I \tag{2.1}$$

El valor final C_n en capitalización simple, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como:

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + i\,C_0 = C_0(1+i)\\
&C_2 = C_1 + i\,C_0 = C_0(1+i) + i\,C_0 = C_0(1+2\,i)\\
&C_3 = C_2 + i\,C_0 = C_0(1+2\,i) + i\,C_0 = C_0(1+3\,i)\\
&\vdots\\
&C_n = C_{n-1} + i\,C_0 = C_0\big[1+(n-1)i\big] + i\,C_0 = C_0(1+i\,n)
\end{aligned}$$

$$C_n = C_0(1+i\,n) \tag{2.2}$$

expresión que relaciona el montante o capital final, transcurridos n períodos de capitalización, con el capital inicial prestado. ∎

Al término $(1+i\,n)$, se le denomina *factor de capitalización simple*, y es un número tal que multiplicado por el capital inicial, nos permite obtener el capital financieramente equivalente al final del período n y que coincide con el capital final C_n.

Si comparamos (2.1) con (2.2),

$$I = C_n - C_0$$

$$I = C_0(1+i\,n) - C_0$$

$$I = C_0 + C_0\, i\, n - C_0$$

obtenemos,

$$I = C_0\, i\, n \tag{2.3}$$

expresión que nos permite obtener los intereses devengados o rendimiento producido por un capital C_0 durante un período n, y de la que se deduce que éstos son proporcionales al capital, al interés unitario y al tiempo.

Si expresamos el tiempo en m-ésimos de años (semestres, trimestres, meses, semanas,...) las fórmulas (2.2) y (2.3) se pueden generalizar:

$$C_n = C_0 \left(1 + i\, \frac{n}{m}\right)$$

$$I = \frac{C_0\, i\, n}{m}$$

siendo m la fracción del año.

m	=	1	años
m	=	2	semestres
m	=	4	trimestres
m	=	12	meses
m	=	24	quincenas
m	=	52	semanas
m	=	360	días del año comercial
m	=	365	días del año natural o civil

Es usual definir el sistema de capitalización simple por medio de las propiedades señaladas a i. Así suele decirse que la función de capitalización simple es aquella que define un sistema financiero en que el rédito acumulado es proporcional a la amplitud del período.

Ejemplo 2.1 Calcular los intereses producidos y el importe total adeudado de un capital de 450 € durante 60 días al 7 % de interés simple.

$$I = C_0\, i\, n \qquad I = 450 \cdot 0,07\, \frac{60}{360} = 5,25$$

$$C_n = C_0 + I \qquad C_n = 450 + 5,25 = 455,25$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener I y C_n,

60 [n] 7 [i] 450 [CHS] [f] [INT] obteniendo $5,25$

y pulsando [+] dará como resultado $455,25$

2.1.1. Magnitudes derivadas

Si despejamos C_0 de (2.2) se tiene:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i\, n)} \tag{2.4}$$

que nos permite calcular el valor capital inicial o actual si se conoce el montante, el tanto y la duración.

Para calcular n o número de períodos, se aplicará:

$$n = \frac{C_n - C_0}{C_0\, i} \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.2 Calcular el montante de 1 000 € al 4 % de interés anual, al cabo de 90 días. ¿Cuánto tiempo será preciso que transcurra para que el montante sea un 5 % más?

Aplicando (2.2) y (2.5),

$$C_n = C_0(1+i\,n) \qquad C_n = 1\,000\left(1+0,04\,\frac{90}{360}\right) = 1\,010$$

$$n = \frac{C_n - C_0}{C_0\,i} \qquad n = \frac{1\,050-1\,000}{1\,000\cdot 0,04} = 1,25 = 1 \text{ año y } 3 \text{ meses}$$

2.2. Intereses anticipados

En ocasiones se plantean operaciones en las que el prestamista cobra los intereses por anticipado, es decir, en el mismo momento en el que se concierta la operación.

Si el capital prestado es C_0, el tipo de interés anticipado i^* y la duración n, los intereses se obtienen tal como hemos visto en (2.3) como $I = C_0\,i^*\,n$, con lo que en el origen se recibe:

$$C_0 - C_0\,i^*\,n = C_0(1-i^*\,n)$$

Se debe verificar,

$$C_0(1-i^*\,n)(1+i\,n) = C_0$$

de donde,

$$i = \frac{\dfrac{1}{1-i^*\,n}-1}{n} = \frac{i^*}{1-i^*\,n}$$

del mismo modo, i^*

$$i^* = \frac{i}{1+i\,n}$$

y si $n = 1$,

$$i = \frac{i^*}{1-i^*} \qquad i^* = \frac{i}{1+i} \tag{2.6}$$

■

2.3. Cálculo de los intereses simples. Métodos abreviados

Los intereses, tal como se ha visto en (2.3), tienen por cuantía la expresión $I = C_n - C_0$.

Normalmente, el tiempo n y el tipo de interés i están referidos al año como unidad de tiempo, pero al aplicarse la ley de interés simple en operaciones a corto plazo (inferiores al año), se aplican métodos abreviados cuya utilidad práctica se manifiesta cuando hay que calcular los intereses producidos por varios capitales. Los dos más utilizados son:

2.3.1. Método de los multiplicadores fijos

Si al producto $C_0\,n$ del capital por el tiempo se le designa por N y al cociente $\dfrac{i}{360}$ ó $\dfrac{i}{365}$ por M, entonces la fórmula para el cálculo de los intereses se expresará mediante el producto del llamado *número comercial* N, por el *multiplicador fijo* M, es decir:

$$I = N\,M \tag{2.7}$$

2.3.2. Método de los divisores fijos

Si i pasa a dividir al denominador y al cociente $\frac{360}{i}$ ó $\frac{365}{i}$ llamado *divisor fijo*, se le representa por D la fórmula del interés se expresará:

$$I = \frac{N}{D} \tag{2.8}$$

Ejemplo 2.3 Calcular los intereses producidos por un capital de 3 500 € en 60 días a un tipo de interés del 6 % anual, si se utiliza el año comercial utilizando para ello los métodos abreviados.

$$N = 3\,500 \cdot 60 = 210\,000$$
$$M = \frac{0,06}{360} = 0,0001\widehat{6}$$
$$D = \frac{360}{0,06} = 6\,000$$
$$I = N\,M = 35 \qquad I = \frac{N}{D} = 35$$

2.4. Descuento simple comercial

La ley financiera del descuento simple comercial se define como aquella en la que los descuentos de un periodo cualquiera son proporcionales a la duración del periodo y al capital anticipado o descontado. Se trata de una operación inversa a la de capitalización simple. Cuando se descuenta un capital de cuantía C_0, por

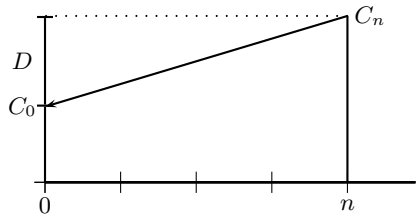


Figura 2.2: Descuento simple

n años, el valor descontado o actual que se obtiene es:

$$C_0 = C_n(1 - d\,n) \tag{2.9}$$

C_n se conoce con los nombres de capital final o capital nominal y a C_0 se le designa como valor actual, valor efectivo o valor descontado.

Este sistema de descuento tiene como limitación $n = \frac{1}{d}$ tal como puede verse en el figura 2.3 por tanto, será válido hasta $n < \frac{1}{d}$. ∎

2.4.1. Magnitudes derivadas

El número de años n y el tanto d se calculan en:

$$n = \frac{C_n - C_0}{C_n\,d} \tag{2.10}$$

$$d = \frac{C_n - C_0}{C_n\,n} \tag{2.11}$$

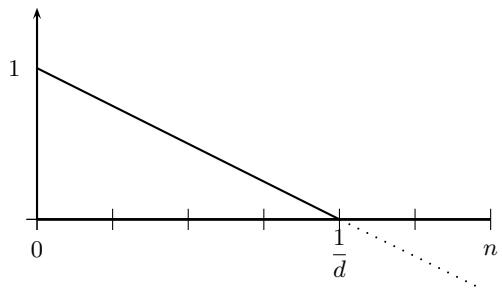


Figura 2.3: Campo de validez

Ejemplo 2.4 Calcular el valor descontado, en descuento comercial, de un capital de 50 000 € que vence dentro de 4 años, si el tanto de descuento es el 6 %.

Haciendo uso de (2.9), se tiene:

$$C_0 = C_n(1 - d\,n) = 50\,000\,(1 - 0,06 \cdot 4) = 38\,000$$

2.5. Cálculo del descuento simple. Métodos abreviados

El valor descontado de un capital de cuantía C_n que vence dentro de n períodos es según (2.9) $C_0 = C_n(1 - d\,n)$ por lo que el descuento efectuado es:

$$D_c = C_n - C_0 = C_n\,d\,n \tag{2.12}$$

debiendo tenerse presente que el tanto d y el tiempo n están referidos a la misma unidad de tiempo (habitualmente el año). Al aplicarse la ley de descuento simple comercial en operaciones a corto plazo, cuya duración suele venir expresada en días (tal como ocurría con la capitalización simple), n representará una fracción del año. La expresión (2.12), según se utilice el año comercial o el civil, quedará del siguiente modo:

$$D_c = C_n\,d\,\frac{n}{360} \qquad\qquad D_c = C_n\,d\,\frac{n}{365}$$

2.5.1. Método de los multiplicadores fijos

Designando por $N = C_n\,n$ al *número comercial* o simplemente número y al cociente $\dfrac{d}{360}$ ó $\dfrac{d}{365}$ por el *multiplicador fijo* M, el descuento simple comercial, será:

$$D_c = N\,M \tag{2.13}$$

2.5.2. Método de los divisores fijos

El descuento se expresa por el cociente $D_c = \dfrac{N}{D}$ siendo N el *número comercial* y D el *divisor fijo* que representa la fracción $\dfrac{360}{d}$ ó $\dfrac{365}{d}$.

$$D_c = \frac{N}{D} \tag{2.14}$$

Ejemplo 2.5 Calcular los descuentos efectuados a un capital de 75 000 € que vence dentro de 120 días si se utiliza el año comercial y el tipo de descuento es el 6 %.

$$N = 75\,000 \cdot 120 = 9\,000\,000 \qquad M = \frac{0,06}{360} = 0,0001\widehat{6}$$

$$D = \frac{360}{0,06} = 6\,000$$

y aplicando las fórmulas (2.12) y (2.13), se tiene:

$$D_c = C_n\, d\, \frac{n}{360} = 75\,000 \cdot 0,06\, \frac{120}{360} = 1\,500$$

$$D_c = N\, M = 9\,000\,000 \cdot 0,0001\widehat{6} = 1\,500$$

$$D_c = \frac{N}{D} = \frac{9\,000\,000}{6\,000} = 1\,500$$

2.6. Descuento simple racional o matemático

El descuento racional, que designaremos por D_r, se calcula sobre el valor efectivo. Es igual al interés del efectivo C_0 durante el tiempo que falta para su vencimiento.

De la expresión de capitalización simple $C_n = C_0(1 + i\, n)$, resulta que el valor descontado de un capital C_n, (disponible al cabo de n períodos), será:

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + i\, n} \tag{2.15}$$

El descuento racional, $D_r = C_n - C_0$, es:

$$D_r = \frac{C_n\, n\, i}{1 + i\, n} \tag{2.16}$$

expresión de la que se deduce que el descuento racional no es proporcional al período de anticipo. ∎

El valor D_r ha sido obtenido tomando como dato el tipo de interés i que no debe ser confundido con el tanto de descuento. Considerando la expresión (2.3), el D_r se puede también obtener como:

$$D_r = C_0\, n\, i \tag{2.17}$$

2.6.1. Tanto de interés equivalente a uno de descuento

Estos son diferentes, pero cabe hablar de un tanto de interés equivalente a uno de descuento y viceversa.

$$D_c = C_n\, d\, n = C_n \frac{i\, n}{1 + i\, n} = D_r \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{i}{1 + i\, n} \\ i = \dfrac{d}{1 - d\, n} \end{cases}$$

Para $n = 1$, se tiene:

$$d = \frac{i}{1 + i} \qquad\qquad i = \frac{d}{1 - d} \tag{2.18}$$

Puede observarse que el valor de d es el interés anticipado visto en 2.6. ∎

Ejemplo 2.6 Calcular el descuento racional que se efectuará sobre un título de 30 000 € nominales, que vence dentro de 150 días, si el tomador del título desea obtener un tanto de interés del 8 % ¿Cuál sería la tasa de descuento equivalente?

El descuento racional es, aplicando (2.16):

$$D_r = 30\,000\,\frac{\dfrac{150}{360}\,0,08}{1+0,08\,\dfrac{150}{360}} = 967,74$$

El efectivo en consecuencia, es $C_0 = 30\,000 - 967,74 = 29\,032,26$ el cual garantiza obtener la rentabilidad.

El tanto de descuento equivalente al interés, sería:

$$d = \frac{i}{1+i\,n} = \frac{0,08}{1+0,08\,\dfrac{150}{360}} = 0,077419$$

El descuento comercial, sería:

$$D_c = C_n\,d\,n = 30\,000 \cdot 0,077419\,\frac{150}{360} = 967,74$$

que coincide con el del racional.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1 Una persona ha prestado una cantidad al 8,5 %. Después de 8 años y 3 meses la retira, y la vuelve a prestar, con los intereses que le ha producido al 10,5 %. ¿Cuál es la cantidad que prestó al 8,5 %, sabiendo que al presente recibe un interés anual de 5 000 €?

Solución: $C_0 = 27\,990,62$

Ejercicio 2.2 Dos capitales cuya suma es de 35 500 € han estado impuestos a interés simple durante el mismo tiempo y al mismo tanto, produciendo unos capitales finales de 13 125 € y 24 150 €. ¿Cuáles eran dichos capitales?

Solución: $C_0^1 = 12\,500$ $\qquad C_0^2 = 23\,000$

Ejercicio 2.3 He comprado mercancías por valor de 13 114 € con un crédito de 15 meses; pero si pago antes de este tiempo, me conceden un descuento del 5 %. ¿En qué época tengo que pagar, si no quiero desembolsar más que 12 489,60 €?

Solución: $u = 11$ meses y 12 días

Ejercicio 2.4 ¿Qué cantidad es necesario prestar al 5,50 % para obtener 200 € de intereses en 132 días?

Solución: $C_0 = 9\,917,36$

Ejercicio 2.5 Calcular el montante de un capital de 150 000 € al 6 % de interés anual colocado durante 1 año y 4 semanas en régimen de capitalización simple.

Solución: $C_n = 159\,692,31$

Ejercicio 2.6 Un capital se ha dividido en tres partes, y se ha impuesto la primera al 4 %; la segunda al 5 %, y la tercera, al 6 %, dando en total una ganancia anual de 9 244 €. Si la primera y tercera parte del capital se hubieran impuesto al 5,5 %, los intereses correspondientes a estas dos partes serían de 6 534 € anualmente. Calcular las tres partes del capital, sabiendo además que la tercera es los 2/9 de la primera.

Solución: $C_0^1 = 97\,200$ $\qquad C_0^2 = 81\,200$ $\qquad C_0^3 = 21\,600$

Ejercicio 2.7 Un capital de cuantía C se ha colocado la cuarta parte al 5 % de interés durante 30 días, la mitad del resto se ha colocado al 4 % durante 60 días y la otra mitad al 8 % durante 40 días. Determinar la cuantía de C si los intereses totales son de 2 750 € y se utiliza el año comercial.

Solución: $C = 400\,000$

Ejercicio 2.8 Un capital colocado durante 10 meses se ha convertido, junto con los intereses, en 29 760 €. El mismo capital, menos sus intereses durante 17 meses, ha quedado reducido a 27 168 €. Determinar el capital y el tanto por ciento a que ha estado impuesto.

Solución: $C = 28\,800 \qquad i = 4\,\%$

Ejercicio 2.9 Hallar por el método de los divisores fijos los intereses totales de los capitales, colocados en los tiempos que se indican y dados a continuación: 100 000 € en 45 días; 75 000 € en 60 días; 60 000 € en 120 días; 90 000 € en 80 días; 150 000 € en 90 días y 225 000 € en 75 días. El tipo de interés aplicable es del 6 %.

Solución: $I = 8\,962,50$

Ejercicio 2.10 Determinar el tiempo necesario para que un capital de cuantía C, colocado al tipo de interés i en régimen de capitalización simple, genere un montante igual a 3 veces el capital inicial.

Solución: $n = \dfrac{2}{i}$

Ejercicio 2.11 ¿Qué capital fue el que hizo que sus intereses fueran la mitad del mismo, sabiendo que el montante generado ascendió a 1 237,40 €?

Solución: $C = 824,93$

Ejercicio 2.12 ¿Cuánto tiempo será necesario para que un capital se transforme en otro cinco veces mayor a un 8 % de interés simple anual?

Solución: $n = 50$ años

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 2.1 Obtenemos los intereses I de forma acumulativa en los dos tramos.

$$C_n = C_0(1+i\,n) \qquad I = C_n\,i\,n$$
$$5\,000 = C_0\left[1+0,085\left(8+\frac{3}{12}\right)\right]\,0,105\cdot 1$$
$$5\,000 = 0,178631\,C_0 \qquad C_0 = 27\,990,62$$

Solución ejercicio 2.2 Definimos el sistema de ecuaciones,

$$C_0^1 + C_0^2 = 35\,500 \qquad C_0^1(1+i\,n) = 13\,125$$
$$\left[35\,500 - \frac{13\,125}{(1+i\,n)}\right](1+i\,n) = 24\,150$$
$$35\,500(1+i\,n) - 13\,125 = 24\,150$$
$$(1+i\,n) = \frac{24\,150 - 13\,125}{35\,500} = 1,05$$
$$C_0^1 = \frac{13\,125}{1,05} \qquad C_0^1 = 12\,500$$
$$C_0^2 = 35\,500 - 12\,500 \qquad C_0^2 23\,000$$

Solución ejercicio 2.3 Conocido el D_c, tendré que obtener el momento n,

$$D_c = C_n - C_0 \qquad D_c = 13\,114 - 12\,489,60 = 624,40$$
$$n = \frac{D_c}{C_n\,i}\,12 = \frac{624,40}{13\,114\cdot 0,05}\,12 = 11,43 \text{ meses}$$
$$n = 11 + 30\cdot 0,43 = 11 \text{ meses y } 12 \text{ días}$$

Tendré que pagar dentro de: 15 meses - (11 meses y 12 días) = 3 meses y 18 días

Solución ejercicio 2.4

$$I = C_0\,i\,n \qquad 200 = C_0\cdot 0,055\,\frac{132}{360}$$
$$C_0 = 9\,917,36$$

Solución ejercicio 2.5

$$C_n = 150\,000\left[1+0,06\left(1+\frac{4}{52}\right)\right]$$
$$C_n = 159\,692,31$$

Solución ejercicio 2.6

$$\left.\begin{array}{rcl} I_1 &=& C_1\cdot 1\cdot 0,055 \\ I_3 &=& C_3\cdot 1\cdot 0,055 \end{array}\right\} I_1 + I_3 = 6\,534$$

$$C_3 = \frac{2}{9}C_1$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 0,055(C_1+C_3) &=& 6\,534 \\ C_3 &=& \frac{2}{9}C_1 \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} C_1 + C_3 &=& 118\,800 \\ C_3 &=& 0,2C_1 \end{array}$$

$$C_1 = 97\,200 \qquad C_3 = 21\,600$$

$$\begin{array}{rcl} I_1 &=& C_1\cdot 1\cdot 0,04 = 97\,200\cdot 0,04 = 3\,888 \\ I_2 &=& C_2\cdot 1\cdot 0,05 = 0,05C_2 \\ I_3 &=& C_3\cdot 1\cdot 0,06 = 21\,600\cdot 0,06 = 1\,296 \end{array}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 9\,244$$
$$3\,888 + 0,05\,C_2 + 1\,296 = 9\,244 \qquad C_2 = \frac{4\,060}{0,05} = 81\,200$$

Solución ejercicio 2.7

$$\frac{1}{4}C \cdot 0,05\frac{30}{360} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)C \cdot 0,04\,\frac{60}{360} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)C \cdot 0,08\,\frac{40}{360} = 2\,750$$

$$0,0010\,C + 0,0025\,C + 0,0033\,C = 2\,750$$
$$0,006875\,C = 2\,750 \qquad C = 400\,000$$

Solución ejercicio 2.8

$$\begin{array}{rcr} C + I_{10} & = & 29\,760 \\ C - I_{17} & = & 27\,168 \\ & (-) & 2\,592 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 27\text{m} & 2\,592 \\ 10\text{m} & I_{10} \end{array}\right\} \qquad I_{10} = \frac{25\,920}{27} = 960$$

$$C = 29\,760 - 960 = 28\,800$$

$$28\,800\,\frac{10}{12}\,i = 960 \qquad i = 0,04$$

Solución ejercicio 2.9

$$I = \frac{N}{D} \qquad D = \frac{360}{i} \qquad N = C\,n$$

$$D = \frac{360}{0,06} = 6\,000$$

$$\begin{array}{rcrcr} 100\,000 & \cdot & 45 & = & 4\,500\,000 \\ 75\,000 & \cdot & 60 & = & 4\,500\,000 \\ 60\,000 & \cdot & 120 & = & 7\,200\,000 \\ 90\,000 & \cdot & 80 & = & 7\,200\,000 \\ 150\,000 & \cdot & 90 & = & 13\,500\,000 \\ 225\,000 & \cdot & 75 & = & 16\,875\,000 \\ & & & (+) & 53\,775\,000 \end{array}$$

$$I = \frac{53\,775\,000}{6\,000} = 8\,962,50$$

Solución ejercicio 2.10

$$3\,C = C(1 + i\,n)$$
$$3\,C = C + C\,i\,n \qquad \frac{3\,C - C}{C\,i} = n$$
$$n = \frac{2\,C}{C\,i} \qquad n = \frac{2}{i}$$

Solución ejercicio 2.11

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}C & = & C\,i\,n \\ 1\,237,40 & = & C\,(1 + i\,n) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}C & = & C\,i\,n \\ 1\,237,40 - C & = & C\,i\,n \end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{2}C = 1\,237,40 - C$$
$$\frac{3}{2}C = 1\,237,40 \qquad C = 1\,237,40\,\frac{2}{3} \qquad C = 824,93$$

Solución ejercicio 2.12

$$5\,C = C\,(1 + 0,08\,n)$$
$$5\,C = C + C \cdot 0,08n \qquad n = \frac{5\,C - C}{0,08\,C}$$
$$n = \frac{4}{0,08} \qquad n = 50 \text{ años}$$

3

Operaciones a corto plazo

3.1. Introducción
3.2. Crédito comercial
3.3. Descuento bancario
3.3.1. Descuento de efectos comerciales
3.3.2. Descuento financiero
3.4. Cuentas corrientes
3.4.1. Métodos para obtener el saldo
3.4.2. Método directo
3.4.3. Método indirecto
3.4.4. Método hamburgués
3.4.5. Cuentas corrientes a interés recíproco y variable
3.4.6. Cuentas corrientes a interés no recíproco
3.5. Cuentas corrientes bancarias a la vista
3.6. Cuentas de ahorro
3.7. Créditos en cuenta corriente
3.8. Equilibrio financiero. Reserva matemática o saldo financiero
3.8.1. Vencimiento común. Vencimiento medio
3.9. Otros activos financieros
3.9.1. Tesoro Público. Letras del Tesoro
Ejercicios propuestos
Resolución de los ejercicios propuestos

3.1. Introducción

Estas operaciones se caracterizan porque su duración suele ser inferior a un año. Desde la perspectiva financiera la distinción entre una operación a corto plazo y otra a largo está en la ley financiera con la que se valora. Se suelen utilizar leyes financieras simples en las operaciones a corto plazo y leyes financieras compuestas en las operaciones a largo plazo.

3.2. Crédito comercial

Son operaciones comerciales en las que el vendedor entrega la mercancía en un determinado momento y el comprador abona su importe una vez transcurrido el plazo convenido. En estas operaciones no suele explicitarse una ley financiera para su valoración.

Por parte del comprador esta forma de crédito no tiene coste cuando, como suele ocurrir con cierta frecuencia, no se aplica un recargo al pago aplazado. Si el precio al contado es el mismo que si se paga de forma aplazada, el proveedor financia gratuitamente al cliente y no existe ley financiera explícita ni implícita.

Sin embargo, los proveedores suelen ofrecer un porcentaje de descuento si se paga al contado; en este caso, la empresa cliente debe medir el coste resultante de no acogerse a esta modalidad.

Si llamamos r al tipo de descuento (en tanto por uno) que aplica el proveedor y n al número de días:

$$C_0 = C_n(1 - r) \tag{3.1}$$

si como hemos visto en (2.9),

$$C_0 = C_n(1 - d\,n)$$

lo igualamos con (3.1),

$$r = d\,n, \text{ y por tanto } d = \frac{r}{n}$$

y en consecuencia, para obtener i, lo sustituimos utilizando (2.18),

$$i = \frac{d}{1 - d\,n}$$

■

Ejemplo 3.1 Si la empresa vendedora concede un crédito comercial a 60 días pero se aplica un descuento del 5 % si se paga al contado, determinar el tanto de descuento comercial y el tanto equivalente en capitalización simple.

$$d = \frac{0,05}{\frac{60}{360}} = 0,3$$

$$i = \frac{0,3}{\left(1 - 0,3\,\frac{60}{360}\right)} = 0,315789$$

Una alternativa para el vendedor es acudir al descuento bancario. En este caso, el tanto de coste del crédito comercial que concede es igual al tanto efectivo al que resulta esa operación de descuento.

3.3. Descuento bancario

El descuento bancario es una operación simple, bancaria, en la que el banco interviniente asume la posición acreedora al entregar a su cliente el valor actualizado de un capital futuro documentado mediante un efecto de comercio[1].

Para la obtención del valor actual se aplica el descuento comercial al tanto estipulado, deduciéndose también la comisión bancaria, así como el impuesto sobre Actos Jurídicos Documentados[2].

Las operaciones de descuento están exentas de tributación por el impuesto sobre el valor añadido (IVA)[3]; sin embargo, cuando el banco toma los efectos en gestión de cobro, sin aplicar descuento, tributa por este impuesto la comisión cobrada por prestar este servicio.

El descuento bancario distingue entre:

- *Descuento de efectos comerciales* cuando los efectos a descontar proceden de transacciones comerciales (crédito comercial) y se busca liquidez a través del descuento.
- *Descuento financiero*, cuando se trata de una operación de crédito o préstamo que concede el banco al cliente y que se formaliza a través de un efecto de comercio.

3.3.1. Descuento de efectos comerciales

Es una operación destinada a proporcionar liquidez a las empresas vendedoras ya que transforma en dinero efectivo los créditos comerciales concedidos a sus clientes. La acumulación de estos créditos suele ocasionar problemas de tesorería al vendedor, y éste para eliminar el mismo, puede acudir al banco a descontar esos créditos. Para ello, el vendedor (librador) gira una letra contra el comprador (librado) y la descuenta en un banco (tomador). En el descuento bancario, el banco realiza dos funciones: por un lado concede crédito al cliente, al entregarle el valor descontado del nominal del efecto utilizando para ello la ley financiera de descuento comercial, y por otro realiza la gestión de cobro del efecto al librado, por la que percibe una comisión de cobranza.

siendo,

C_0 = efectivo o descontado,
C_n = nominal del efecto,
d = tanto de descuento comercial aplicado por el banco,
n = duración de la operación en días. Se descuentan los días naturales que han de transcurrir, desde la fecha de negociación hasta la de su vencimiento, aunque la base es de 360 días (año comercial),
g = comisión de cobranza proporcional al nominal del efecto, aunque se aplica un g_{min} cuando $g\,C_n < g_{min}$,
T = impuesto sobre Actos Jurídicos Documentados,
G = otros gastos (correo, fax,...).

[1] El efecto más utilizado, es la letra de cambio, aunque también se pueden descontar pagarés, recibos, *warrants*, etc.

[2] De acuerdo con el artículo 33 del Texto refundido del Impuesto sobre Transmisiones Patrimoniales y Actos Jurídicos Documentados, que indica: «Están sujetas las letras de cambio, los documentos que realicen función de giro o suplan a aquellas... Se entenderá que un documento realiza función de giro cuando acredite remisión de fondos..., o implique una orden de pago...»

[3] Tal como señala el Reglamento del impuesto en su artículo 13, 18.º h.

El efectivo, se obtiene como:

$$C_0 = C_n \left(1 - d\,\frac{n}{360} - g\right) - T - G \tag{3.2}$$

Si queremos comparar $g\,C_n$ con el importe mínimo,

$$C_0 = C_n \left(1 - d\,\frac{n}{360}\right) - g\,C_n - T - G$$

Ejemplo 3.2 Se efectúa una venta de 20 000 € a pagar dentro de 90 días, documentada mediante una letra de cambio que se lleva a descontar a un banco, el cual aplica un tanto de descuento comercial del 8 % y una comisión de cobranza del 4‰. Determinar el efectivo que obtiene el vendedor, sabiendo que el IAJD es de 67,31 €.

$$C_0 = 20\,000 \left(1 - 0,08\,\frac{90}{360} - 0,004\right) - 67,31 = 19\,452,69$$

Réditos y tantos efectivos

Tanto desde la perspectiva del banco como desde la del cliente interesa conocer cuál es el rédito efectivo de rendimiento que obtiene el primero y el rédito de coste al que le resulta al segundo esta operación. Para ello, hay que igualar financieramente lo que realmente ha entregado y recibido cada parte.

Réditos y tantos efectivos para el banco

$$D_b = C_n - C_0 \qquad D_b = C_n - \big[C_n(1 - d\,n - g)\big]$$

$$D_b = C_n(d\,n + g)$$

$$r_b = \frac{C_n(d\,n + g)}{C_n}$$

$$r_b = d\,n + g \tag{3.3}$$

■

El tanto efectivo para el banco se obtiene al establecer la ecuación de equivalencia financiera entre lo efectivamente entregado por el banco y lo que recibe:

$$C_n(1 - d\,n - g) = C_n(1 - d_b\,n)$$

$$d\,n + g = d_b\,n$$

$$d_b = \frac{d\,n + g}{n} \qquad d_b = d + \frac{g}{n} \tag{3.4}$$

■

En consecuencia, d_b aumenta al disminuir la duración de n cuando d y g permanecen constantes.

Es más útil como medida de referencia de la rentabilidad, para poder hacer comparaciones con otras alternativas el tanto de capitalización simple equivalente i_b:

$$C_n(1 - d\,n - g)(1 + i_b\,n) = C_n$$

$$(1 - d\,n - g)(1 + i_b\,n) = 1$$

$$1 + i_b\,n = \frac{1}{1 - d\,n - g} - 1$$

$$i_b = \frac{d\,n + g}{(1 - d\,n - g)n} \tag{3.5}$$

Ejemplo 3.3 Sobre el descuento del efecto anterior de 20 000 € a 90 días, determinar el rédito efectivo, la tasa de descuento y el tipo de interés equivalente.

$$r_b = d\,n + g = 0,08\,\frac{90}{360} + 0,004 = 0,0240$$

$$d_b = d + \frac{g}{n} = 0,08 + \frac{0,004}{\frac{90}{360}} = 0,0960$$

$$i_b = \frac{d\,n + g}{(1 - d\,n - g)n} = \frac{0,08\,\frac{90}{360} + 0,004}{\left(1 - 0,08\,\frac{90}{360} - 0,004\right)\frac{90}{360}} = \frac{0,0240}{0,2440} = 0,098361$$

Réditos y tantos efectivos para el cliente

En el caso del cliente, el coste r_c se obtendrá como cociente entre el descuento realizado y el nominal. Si consideramos n en días:

$$r_c = \frac{C_n - C_0}{C_n} = \frac{C_n\left(d\,\frac{n}{360} + g\right) + T}{C_n}$$

$$r_c = d\,\frac{n}{360} + g + \frac{T}{C_n} \tag{3.6}$$

■

El tanto de descuento comercial para el cliente d_c, se obtiene a través de la ecuación de equivalencia efectiva,

$$C_0 = C_n\left(1 - d_c\,\frac{n}{360}\right)$$

$$d_c = \frac{C_n - C_0}{C_n}\,\frac{360}{n} \tag{3.7}$$

■

o también,

$$d_c = \frac{r_c}{\frac{n}{360}} = d + \left(g + \frac{T}{C_n}\right)\,\frac{360}{n}$$

El tanto equivalente en capitalización simple i_c debe cumplir,

$$C_0\left(1 + i_c\,\frac{n}{360}\right) = C_n$$

con lo que,

$$i_c = \frac{C_n - C_0}{C_0}\,\frac{360}{n} \tag{3.8}$$

■

como puede observarse, cuanto menor sea n, mayor resulta i_c cuando las demás magnitudes no varían.

Ejemplo 3.4 Determinar para el ejemplo anterior los réditos y tantos de coste efectivo para el cliente.

$$r_c = \frac{C_n - C_0}{C_n} = \frac{20\,000 - 19\,452,69}{20\,000} = \frac{547,31}{20\,000} = 0,0274$$

$$d_c = r_c\frac{360}{n} = 0,0274\,\frac{360}{90} = 0,1095$$

$$i_c = \frac{C_n - C_0}{C_0}\,\frac{360}{n} = \frac{547,31}{19\,452,69}\,\frac{360}{90} = 0,1125$$

Límite de descuento

Aunque la relación entre el banco y el cliente puede ser ocasional, lo más frecuente es que la relación se establezca con carácter continuado, en cuyo caso el banco efectúa un estudio previamente a la empresa cliente a través de la documentación facilitada por ésta (balance, cuenta de resultados, proveedores, clientes,...). Consecuencia del estudio es la clasificación de riesgo comercial que el banco asigna al cliente y que se manifiesta en un *límite de descuento* o volumen máximo de efectos pendientes de vencimiento que admite a descuento en cada fecha.

Facturas de descuento

Es frecuente que el cliente presente una remesa de efectos en vez de uno solo. En este caso, lo hace mediante un documento que suele proporcionar el propio banco, denominado *factura de descuento*, en el que se detallan para cada efecto, el librado, la plaza, la cuantía nominal y el vencimiento. Los bancos suelen abonar en la cuenta del cliente el nominal total de la factura admitida a descuento y posteriormente cargan con la misma fecha el descuento efectuado, incluyendo las comisiones y algún otro gasto que pudiera haber, enviando al cliente la *liquidación* practicada en la que se detallan para cada efecto los mismos datos de la factura y además los días de descuento, los números comerciales, tal como se ha visto en (2.5.2), el tipo de descuento, comisiones y total adeudado.

Si los nominales con de cuantías C_1, C_2, $\dots C_t$, con duraciones de n_1, n_2, $\dots n_t$ días, hasta los vencimientos respectivos, el efectivo percibido por el cliente es:

$$E = \left(C_1\left(1 - d\,\frac{n_1}{360} - g_1\right) - T_1\right) + \cdots + \left(C_t\left(1 - d\,\frac{n_t}{360} - g_t\right) - T_t\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{t} C_s - \left(\frac{\sum_{s=1}^{t} N_s}{D} + \sum_{s=1}^{t} C_s\, g_s + \sum_{s=1}^{t} T_s\right)$$

Descuento de letras persiana

Se denominan *letras persiana* a un conjunto de letras que tienen la misma cuantía nominal y cuyos vencimientos son periódicos. Suelen proceder de ventas a plazos de bienes muebles o inmuebles y la periodicidad más frecuente es la mensual.

Del mismo modo que en el descuento bancario, el efectivo que se obtiene es:

$$E = C\left(1 - d\frac{1}{m} - g\right) - T_1 + C\left(1 - d\frac{2}{m} - g\right) - T_2 + \cdots +$$
$$+ C\left(1 - d\frac{n-1}{m} - g\right) - T_{n-1} + C\left(1 - d\frac{n}{m} - g\right) - T_n$$

$$E = C\,n\left(1 - d\,\frac{n+1}{2\,m} - g\right) - \sum_{s=1}^{n} T_s \tag{3.9}$$

■

Letras impagadas

Cuando una letra no es pagada a su vencimiento, el banco carga en la cuenta del cliente el importe nominal C_n mas los gastos de devolución que se han producido: protesto de la letra ante notario G_p y las comisiones correspondientes de devolución C_d y de protesto por su gestión C_p, así como otros posibles gastos de correo, fax,... G.

En consecuencia el importe total de la devolución C_t, será:

$$C_t = C_n + C_n\, C_d + G_p + C_p + G$$

■

Ejemplo 3.5 Una letra de nominal 10 000 € girada por la empresa resulta impagada a su vencimiento. Determinar la cuantía que cargará el banco si la comisión de devolución es del 2,5 %, los gastos de protesto ascienden a 45 €, la comisión de protesto es de 15 € y los otros gastos suman 3 €.

$$C_t = 10\,000 + 10\,000 \cdot 0,025 + 45 + 15 + 3 = 10\,313$$

3.3.2. Descuento financiero

A diferencia de los efectos comerciales que corresponden a ventas a crédito, los efectos financieros corresponden a operaciones de crédito que conceden los bancos a sus clientes y que se documentan mediante una o varias letras de cambio. Sus vencimientos habituales son de 3 ó 6 meses, suele exigirse algún aval y puede ser intervenida por fedatario público. Es frecuente formalizarla de manera que el avalista gire contra el acreditado, quien la acepta y descuenta en el banco, o bien es el propio banco quien gira contra el acreditado quien acepta siendo avalada por otra persona.

El efectivo a percibir será:

$$C_0 = C_n \left(1 - d\,\frac{n}{360} - g\right) - T \tag{3.10}$$

■

3.4. Cuentas corrientes

Las cuentas corrientes son operaciones compuestas que tienen por objetivo proporcionar fluidez a las relaciones comerciales entre las partes y consistentes en el intercambio de capitales entre dos personas que acuerdan saldar las diferencias financieras en un momento denominado fecha de cierre. La ley financiera usualmente utilizada es la de capitalización simple.

En un sentido amplio, son operaciones de crédito recíproco, posdeterminadas, ya que no se conocen a priori los capitales futuros que van a conformar la operación. Cada parte abre una cuenta a la otra en la que se cargan o abonan los capitales siguiendo las reglas contables. La obtención del saldo permite liquidar la cuenta, o bien pasarlo a cuenta nueva como primer capital en el caso frecuente de que siga manteniéndose la relación comercial.

Clases

1. Atendiendo a la existencia o no de intereses,

   a) Cuentas corrientes *simples* o sin intereses, cuando los capitales no devengan intereses y el saldo se obtiene por simple diferencia entre el debe y el haber de la cuenta.

   b) Cuentas corrientes *con intereses* cuando los capitales intervinientes devengan intereses de acuerdo con la ley establecida durante el tiempo que media hasta la fecha de cierre. En este caso, cabe distinguir:

      1) Cuentas corrientes con *interés recíproco*, cuando la ley financiera es única para ambas partes.
      2) Cuentas corrientes con *interés no recíproco*, cuando se aplica distinta ley financiera a los saldos según sean deudores o acreedores.
      3) Cuentas corrientes a *interés variable*, cuando se aplica más de un tanto de valoración a lo largo de la duración.

2. Atendiendo a las partes intervinientes,

   a) Cuentas corrientes *comerciales*, cuando se establecen entre empresas o empresarios en general, los cuales se conceden créditos recíprocamente.

   b) Cuentas corrientes *bancarias*, cuando una de las partes es una entidad de crédito (bancos, cajas de ahorro,...). El crédito es unilateral salvo acuerdo expreso. Se distingue entre una cuenta corriente a la vista, cuenta de ahorro y cuenta de crédito.

3.4.1. Métodos para obtener el saldo

Los métodos más utilizados a lo largo del tiempo han sido tres: directo, indirecto y hamburgués. Todos tratan de obtener el saldo de una forma sencilla y rápida, pero también general en cuanto a los casos que puedan presentarse.

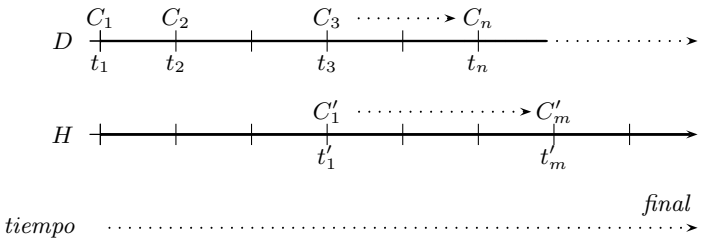


Figura 3.1: Cuenta corriente

En la práctica suele operarse con números comerciales truncados, es decir, prescindiendo de las dos últimas cifras y redondeando si es preciso para eliminar partes decimales. Lógicamente en el divisor fijo también se prescinde de las dos últimas cifras; esto se hace para trabajar con números más manejables teniendo en cuenta que estas dos últimas cifras no tienen incidencia práctica perceptible.

Para calcular el número de días, se cuentan los días naturales que transcurren entre el vencimiento de cada capital y la fecha de cierre de la cuenta.

3.4.2. Método directo

Considera que cada capital, deudor o acreedor, devenga intereses durante los días que median desde la fecha de su vencimiento hasta el momento de liquidación.

3.4.3. Método indirecto

En este sistema los capitales generan intereses desde la fecha en la que se originan hasta una fecha fija denominada *época*. Ello supone un cálculo de intereses que no se corresponden con la realidad, por lo que cuando se conozca la fecha de liquidación deberán rectificarse.

De los métodos de cálculo, por su utilización práctica se describe seguidamente el método hamburgués.

3.4.4. Método hamburgués

También es conocido como *método de los saldos* o *método escalar* porque los números se van calculando sobre los saldos parciales de cuantías, o sea, haciendo tantas escalas como capitales intervengan. La mecánica operatoria es la siguiente:

- Se anotan los datos del primer capital en las columnas del debe o del haber según corresponda, excepto los días que no pueden anotarse hasta que no se conozca la fecha y vencimiento del segundo capital.
- Cuando se conozca el vencimiento del segundo capital, además de completar los días y número de la primera fila, se anotan los datos de la segunda incluido el saldo correspondiente a las dos primeras cuantías, quedando pendientes los días y número que sólo se conocerán cuando lo sea el tercer capital. Así se va repitiendo sucesivamente hasta llegar a la fecha de cierre. Los días por los que hay que multiplicar al último saldo son los comprendidos entre el vencimiento del último capital y la fecha de cierre.

  Los días se cuentan desde que vence un capital hasta que vence el que tiene la fecha siguiente. Se anotan los días que transcurren entre dos intervalos. Los saldos de cuantías se van obteniendo sucesivamente en cada vencimiento.

En general, cuando hay n saldos parciales deudores (S_r) y m acreedores, (S'_r), el saldo final es:

$$S_p = S_{n+m} + \frac{\sum_{r=1}^{n} S_r\, n_r - \sum_{r=1}^{m} S'_r\, n'_r}{D}$$

Siendo S_{n+m} el saldo de cuantías $\left(\sum C_s - \sum C'_s\right)$ y S_p, el saldo final, suma de saldo de cuantías y de los intereses. Si $S_p > 0$ el saldo es deudor y si $S_p < 0$, el saldo es acreedor. ∎

3.4.5. Cuentas corrientes a interés recíproco y variable

Son aquellas en las que se modifica el tipo de interés en algún momento del transcurso de la operación.

Método hamburgués

Para la determinación de los intereses y el saldo, se procede normalmente hasta la fecha en que cambia el tanto. La última cuantía con vencimiento anterior a dicha fecha se multiplica por los días que transcurren entre ese vencimiento y la fecha de cambio para calcular el último número que produce interés a tanto i'.

Se continúa con el saldo de cuantías anterior durante los días que falten hasta el vencimiento de la siguiente cuantía, siguiendo luego normalmente con la aplicación del método hamburgués.

3.4.6. Cuentas corrientes a interés no recíproco

En esta modalidad de cuentas corrientes, el tipo de interés que se aplica a los saldos deudores es distinto del que se aplica a los saldos acreedores. El método hamburgués es el más apropiado en estos casos porque los números comerciales se calculan a partir de los saldos y no de las cuantías, como ocurre al aplicar los métodos directo e indirecto. Se pueden dar los siguientes casos:

1. Cuando todos los saldos de una cuenta son de la misma clase (todos deudores o todos acreedores), la obtención de los intereses es muy sencilla, aplicando a la suma de números el divisor fijo al tanto (deudor o acreedor) que corresponda. Este caso es frecuente en las cuentas corrientes bancarias.

2. Cuando habiendo saldos de distinta clase, los asientos contables están ordenados por fechas de vencimiento de las cuantías, el saldo también se obtiene con gran facilidad, teniendo en cuenta que ahora hay dos divisores fijos distintos, D y D',

$$S_p = S_{n+m} + \left(\frac{\sum_{r=1}^{n} S_r \, n_r}{D} - \frac{\sum_{r=1}^{m} S'_r \, n'_r}{D'} \right)$$

3. Cuando habiendo saldos de distinta clase, los asientos contables no están ordenados por vencimientos hay que proceder con cuidado para asignar los días y números, deudores o acreedores, correctamente.

   La forma más sencilla es *ordenar las partidas por sus vencimientos*, con lo cual se estará en el caso anterior. El empleo de una hoja de cálculo facilita enormemente la labor.

3.5. Cuentas corrientes bancarias a la vista

Son actualmente la modalidad más generalizada de cuentas corrientes y son abiertas por los bancos, cajas de ahorro y entidades de crédito cooperativo a petición de sus clientes. Son operaciones bancarias pasivas de crédito unilateral a favor del cliente salvo excepciones en las que se permite la existencia de saldo deudor (descubierto en cuenta) siendo en este caso el tanto de interés no recíproco.

El método hamburgués es el que se utiliza en la práctica bancaria puesto que se adapta mejor que los otros métodos para el tratamiento de los casos de descubiertos en cuenta (interés no recíproco).

El tanto a que el banco abona intereses es muy bajo, no superando el 1 % anual y siendo entre el 0 % y el 0,1 % el tipo más frecuente. Los días se obtienen de acuerdo a la valoración de la Circular 8/90, de 7 de septiembre a Entidades de Crédito, sobre transparencia de las operaciones y protección de la clientela. Contabilizan de la siguiente forma: *los abonos en la cuenta vencen el día hábil siguiente al que se realizan, y los cargos, el mismo día en que se efectúan.* Los intereses suelen liquidarse mensualmente y tienen una retención a cuenta del impuesto sobre la renta.

Ejemplo 3.6 La cuenta con la empresa a interés deudor del 4 % y acreedor del 18 % con cierre al 31 de diciembre, ha tenido los siguientes movimientos durante el último trimestre:

Fecha	Concepto	Importe	Vcto.
01/10	Saldo anterior a n/favor	46 400	30/09
06/10	Ingreso cheque	50 000	10/10
20/10	Pago cheque	30 000	06/11
15/11	Pago transferencia	25 000	15/11
30/11	Ingreso en efectivo	10 000	30/11
14/12	Pago cheque	80 000	08/01

Obtener el saldo y efectuar la liquidación de la cuenta.

			Cuantía				Números	
Fecha	Vcto.	Concepto	Debe	Haber	Saldo	Días	Deudores	Acreedores
01/10	30/09	Saldo anterior a n/favor	46 400,00		46 400,00 D	10	4 640	
06/10	10/10	Ingreso cheque	50 000,00		96 400,00 D	27	26 028	
20/10	06/11	Pago cheque		30 000,00	66 400,00 D	9	5 976	
15/11	15/11	Pago transferencia		25 000,00	41 400,00 D	15	6 210	
30/11	30/11	Ingreso en efectivo	10 000,00		51 400,00 D	39	20 046	
14/12	08/01	Pago cheque		80 000,00	28 600,00 H	-8		-2 288
31/12	31/12	Intereses a n/favor	698,89		27 901,11 H			
31/12	31/12	Intereses a s/favor		114,40	28 015,51 H			
						92	62 900	-2 288

Los intereses deudores, se obtienen como,

$$I_d = \frac{6\,290\,000}{\frac{360}{0,04}} = 698,89$$

Del mismo modo, los acreedores,

$$I_h = \frac{228\,800}{\frac{360}{0,18}} = 114,40$$

3.6. Cuentas de ahorro

Son otra modalidad de relación entre banco y cliente y pueden abrirse en cualquiera de las instituciones financieras descritas en el apartado anterior. El banco entrega al titular una *libreta* de ahorro en la que se van anotando los movimientos de capitales y los saldos. Suelen retribuirse a un tipo algo mayor que las cuentas corrientes a la vista. En la práctica, con las cuentas de ahorro se pueden realizar el mismo tipo de operaciones que con las cuentas bancarias a la vista, con la diferencia de que no se dispone de cheques. Los días se contabilizan siguiendo el procedimiento quincenal.

3.7. Créditos en cuenta corriente

Los créditos son operaciones activas realizadas por los bancos o cajas de ahorro por las que ponen capital a disposición del cliente hasta un límite fijado en el contrato que recibe el nombre de *póliza* y suele estar intervenida por fedatario público. Para su instrumentalización práctica el banco abre una *cuenta de crédito* al cliente donde se cargan o abonan las transacciones que vaya efectuando éste, así como los intereses y comisiones establecidas, debiendo ser cancelado en la fecha fijada en el contrato.

En general son operaciones de crédito unilateral a favor del banco, si bien el cliente puede situarse en posición acreedora en algún momento, siendo en estos casos el interés no recíproco, con un tanto muy superior para los saldos deudores.

Los bancos suelen exigir al cliente compensaciones mediante retenciones en cuenta u otras modalidades que le permitan disminuir el riesgo y obtener una rentabilidad complementaria, lo cual representa para el cliente un mayor coste de financiación. También suelen exigir garantías:

- *garantía personal*, cuando se conceden en base a la solvencia y confianza personal que merece el cliente, exigiéndole frecuentemente la firma de algún avalista.
- *garantía real*, cuando se afectan al buen fin de la operación bienes muebles (prenda) o bienes inmuebles (hipoteca).

Cuando el crédito se materializa en una cuenta corriente, se suele llevar por el método hamburgués.

3.8. Equilibrio financiero. Reserva matemática o saldo financiero

En el estudio de toda operación financiera, hemos de recordar la equivalencia financiera (véase 1.3, en la página 4). El equilibrio se establece cuando el *valor de la prestación* es igual al *valor de la contraprestación* en un punto cualquiera p en base a una ley financiera. Lo usual es plantear la equivalencia (igualdad de sumas financieras) en el origen o al final de la operación.

Si suponemos que el valor de la prestación y contraprestación son, respectivamente, en el origen $S_0(A)$ y $S_0(D)$ debiendo verificarse la igualdad $S_0(A) = S_0(D)$ entre las sumas financieras y continuará satisfaciéndose en todo punto p, con $0 < p < n$, siendo n la duración de la operación.

Por tanto, si se designa:

$S_{11}(A)$ = al valor en p de la prestación vencida o anterior a p
$S_{12}(A)$ = al valor en p de la prestación pendiente o posterior a p
$S_{21}(D)$ = al valor en p de la contraprestación vencida o anterior a p
$S_{22}(D)$ = al valor en p de la contraprestación pendiente o posterior a p

debiendo verificarse por exigencia de la equivalencia financiera,

$$S_p(A) = S_{11}(A) + S_{12}(A) = S_{21}(D) + S_{22}(D) = S_p(D)$$

y de esta igualdad, se sigue,

$$S_{11}(A) - S_{21}(D) = S_{22}(D) - S_{12}(A)$$

La diferencia $R_p = S_{11}(A) - S_{21}(D)$ recoge el saldo entre el valor de lo entregado por A (recibido por D) y por D (recibido por A) y recibe el nombre de *reserva matemática o saldo financiero por el método retrospectivo* por haber sido calculada volviendo al pasado. Si $R_p > 0$ el valor de lo entregado por A supera a lo entregado por D y en caso de pretender finalizar la operación en este punto (o simplemente restablecer el equilibrio financiero), A tendría que recibir de D el valor del saldo. Cuando sea $R_p < 0$ la situación, sería la contraria.

$R_p = S_{22}(D) - S_{12}(A)$ recogen la diferencia del valor de lo que tienen que entregar D (recibir A) y A (recibir D) y se denominan *reserva matemática o saldo financiero por el método prospectivo* por haber sido calculada en función de los compromisos futuros de deudor y acreedor. ∎

3.8.1. Vencimiento común. Vencimiento medio

Sean los capitales $(C_1, t_1), (C_2, t_2), \cdots, (C_n, t_n)$ que se pretende sustituir por un único capital (C, p) de tal manera que resulte equivalente a todos los n capitales dados. El capital (C, p) será la suma financiera de los (C_s, t_s) y su vencimiento p recibe el nombre de *vencimiento común*.

Vencimiento común

Partiendo de (2.9),

$$C(1 - d\,p) = \sum_{s=1}^{n} C_s(1 - d\,t_s)$$

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \frac{1 - d\,t_s}{1 - d\,p} \qquad\qquad p = \frac{C - \sum_{s=1}^{n} C_s(1 - d\,t_s)}{C\,d} \tag{3.11}$$

cuando los vencimientos vienen dados en días, aplicando los métodos abreviados para el cálculo, la expresión (3.11) se convierte en,

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s - \dfrac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{D}}{1 - \dfrac{p}{D}} \qquad\qquad p = \frac{\left(C - \sum_{s=1}^{n} C_s\right) D + \sum_{s=1}^{n} N_s}{C} \tag{3.12}$$

Vencimiento medio

La solución al vencimiento medio es:

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \qquad\qquad p = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s - \sum_{s=1}^{n} C_s(1 - d\,t_s)}{d \sum_{s=1}^{n} C_s} = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s t_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s} \tag{3.13}$$

que es la media aritmética de los vencimientos ponderada con las cuantías de los capitales.

Si el tiempo viene expresado en días, expresaremos la fórmula (3.13) en función del divisor fijo D y de los números comerciales N,

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \qquad p = \frac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s} \tag{3.14}$$

■

Ejemplo 3.7 Tres efectos de nominales 1 000 €, 1 500 € y 2 500 € vencen respectivamente dentro de 30, 60 y 90 días. ¿Cuál será el nominal del efecto que sustituye a los tres anteriores si su vencimiento es dentro de 120 días? ¿Cuál sería el vencimiento de un efecto de nominal 5 000 €? Para la valoración, debe considerarse una tasa de descuento del 6 % y el año comercial.

Para el vencimiento común,

$$\sum_{s=1}^{n} C_s = 1\,000 + 1\,500 + 2\,500 = 5\,000$$

$$\sum_{s=1}^{n} N_s = 1\,000 \cdot 30 + 1\,500 \cdot 60 + 2\,500 \cdot 90 = 345\,000$$

$$D = \frac{360}{0,06} = 6\,000$$

$$C = \frac{5\,000 - \dfrac{345\,000}{6\,000}}{1 - \dfrac{120}{6\,000}} = 5\,043,37$$

Y el vencimiento medio,

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s = 5\,000 \qquad p = \frac{345\,000}{5\,000} = 69 \text{ días.}$$

3.9. Otros activos financieros

Los activos financieros son títulos emitidos por las empresas, entidades financieras o el Estado para obtener la financiación necesaria.

3.9.1. Tesoro Público. Letras del Tesoro

Son valores de renta fija a corto plazo emitidos por el Tesoro Español para financiar el déficit. Las letras se emiten mediante subasta. El importe mínimo de cada petición ha de ser de 1 000 € y las de importe superior han de ser múltiplos de este. Se emiten al descuento d y en consecuencia, el rendimiento, es la diferencia entre el precio de adquisición C_0 y el valor de reembolso C_n . El Tesoro emite letras —en la actualidad— a un tiempo n de 3, 6, 9 y 12 meses.

Si se emiten letras a un período superior al año, el cálculo se hace con la ley de capitalización compuesta. Puede verse la determinación de la rentabilidad en función de su cotización en el mercado secundario en 9.8.2 de la página 161.

El valor actual, o cualquiera de sus variables, lo obtenemos partiendo de la ecuación general de descuento vista en (3.2) de la página 22.

Ejemplo 3.8 Determinar para una letra del Tesoro de 1 000 € emitida al 10 % y 12 meses,

1. Efectivo a la suscripción inicial,
2. Valor 180 días antes de su vencimiento si se vende al 9,75 %,
3. Rentabilidad obtenida por el primer suscriptor,
4. Rentabilidad que obtiene el segundo comprador.

1. El valor en la suscripción,

$$C_0 = C_n\,(1 - d\,n) \qquad C_0 = 1\,000\,(1 - 0,1 \cdot 1) \qquad C_0 = 900$$

2. Cuando han transcurrido 185 días (y por tanto faltan 180 días),

$$C_0 = 1\,000\,\left(1 - 0,0975\,\frac{180}{360}\right) \qquad C_0 = 951,25$$

3. El rendimiento para el suscriptor, sería el valor de i obtenido de la ecuación (2.2) en la página 8,

$$951,25 = 900\left(1 + \frac{185}{360}\right) \qquad i = 0,110811 \approx 11,081\,\%$$

La rentabilidad del comprador, utilizando también (2.2),

$$i = \frac{1\,000 - 951,25}{951,25\,\dfrac{180}{360}} \qquad i = 0,102497 \approx 10,250\,\%$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1 ¿Qué rebaja debe hacerse sobre un total de 1 869,75 €, pagadas 11 meses antes del vencimiento, si se obtiene un 0,5 % de descuento mensual?

Solución: $D = 102,84$

Ejercicio 3.2 Determinar la fecha de vencimiento de un efecto de 75 150 €, sabiendo que si se descuenta hoy al 3 % se retienen 0,30 € más por el procedimiento comercial que por el racional.

Solución: $u = 24$ días

Ejercicio 3.3 Se remiten a un banco dos efectos: uno de 2 000 € pagadero a los 60 días, y otro de 2 500 € pagadero a los 36 días; el banquero descuenta ambos efectos al 5 % y retiene además el 1‰ de comisión sobre la cantidad escrita en cada efecto. ¿Cuánto debe percibir el portador?

Solución: $C_0 = 4\,466,33$

Ejercicio 3.4 En pago de diversas compras he firmado 3 letras a la orden la 1.ª de 800 €, que vence dentro de 20 días; la 2.ª de 1 500 €, pagadera dentro de 45 días, y la 3.ª de 3 200 €, cuyo importe debo satisfacer dentro de 60 días. ¿Cuál debe ser el nominal de un efecto equivalente a estas letras, al plazo de 50 días y al 5 % de interés?

Solución: $C_n = 5\,499,93$

Ejercicio 3.5 Un particular ha firmado a favor de un banquero tres efectos: uno de 3 800 € pagadero a los dos meses; otro de 7 600 €, a los cinco meses, y el tercero, de 11 400 €, a los ocho meses. Posteriormente conviene con su acreedor en pagarle de una vez el total de su deuda. ¿En qué tiempo debe hacerlo para que haya compensación?

Solución: $d = 6$ meses

Ejercicio 3.6 Un comerciante ha de hacer 4 pagos de 5 000 € cada uno. El primero a los 10 días, el segundo a los 15 días, el tercero a los 30 días y el cuarto a los 90 días. ¿Qué día podrá liquidar todas sus deudas con un pago único?

Solución: $d = 36$ días

Ejercicio 3.7 Un comerciante debe pagar un efecto de 6 000 € a los 40 días y cobrar una letra de 2 000 € a los 30 días. ¿Cuál es el vencimiento medio de estos efectos?

Solución: $d = 45$ días

Ejercicio 3.8 Un fabricante propone a un cliente que adquiera una maquinaria cuyo precio es de 110 000 € al contado, suscribiendo 4 letras de 30 000 € cada una, y con vencimientos respectivos de 3, 6, 9 meses y 1 año, a partir del envío de aquella. Determinar a qué tanto se realizó la operación.

Solución: $p = 0,13333$

Ejercicio 3.9 Determinar el valor de las siguientes obligaciones en el día de hoy: 100 000 € con vencimiento en el día de hoy, 200 000 € con vencimiento a los 6 meses al 5 % de interés y 300 000 € con vencimiento a un año con intereses al 6 %.

Solución: $C_0 = 578\,140,82$

Ejercicio 3.10 Un comerciante debe 10 100 € con vencimiento en 2 meses, 20 200 € con vencimiento en 5 meses y 30 300 € con vencimiento en 8 meses. Se desea saldar todas las deudas mediante dos pagos iguales, uno con vencimiento en 6 meses y otro con vencimiento en 10 meses. Determinar el importe de dichos pagos suponiendo un interés del 6 %.

Solución: $C = 30\,603$

Ejercicio 3.11 Se descuenta un efecto de 45 000 € nominales en una entidad de crédito que aplica a estas operaciones un tanto de descuento del 6 % y una comisión del 0,75‰ sobre el nominal por cada 90 días o fracción. Determinar el efectivo percibido por el cliente si descuenta el efecto con 70 días de antelación al vencimiento.

Solución: $C_0 = 44\,441,25$

Ejercicio 3.12 El 22 de septiembre se ha descontado un efecto por el que se han cobrado 3 742 € en concepto de descuento comercial. Si el vencimiento del mismo es el 2 de noviembre y se aplica un 6,72 % anual, ¿cuál es el nominal?

Solución: $C_n = 488\,937,28$

Ejercicio 3.13 Calcula el descuento racional de un efecto por el que se recibieron 23 748,23 €. Su vencimiento fue el 22 de octubre y se aplicó un tipo del 5 % anual, descontándose el 24 de junio.

Solución: $D_r = 395,80$

Ejercicio 3.14 ¿Cuál ha sido el efectivo percibido en un descuento racional por el que se han descontado 472,20 €, vence dentro de 45 días y se ha aplicado el 6,22 % de interés?

Solución: $C_0 = 60\,733,12$

Ejercicio 3.15 Calcula el tipo de descuento comercial equivalente a un tipo de descuento racional del 7,39 % anual para una operación a un semestre.

Solución: $d = 7,1267\,\%$

Ejercicio 3.16 Determinar el líquido a abonar por el banco si descontamos los efectos siguientes: 1 500 € con vencimiento 5/11, 3 000 € al 8/12, 4 000 € al 28/12 y 500 € al 5/1 del año siguiente, sabiendo que la entidad nos aplicará una tasa del 6 % para los vencimientos anteriores a 30 días, 7 % entre 31 y 60 días y 8 % para los vencimientos posteriores a los 60 días. Además, nos cobrará una comisión del 1,5‰ con un mínimo de 2 € y la fecha de descuento es el 14/10.

Solución: $C_0 = 8\,871,78$

Ejercicio 3.17 Obtener el líquido que abonará una entidad financiera en la que se descuentan con fecha 14/10 los siguientes efectos: 12 800 € con vencimiento 5/12, 31 500 € el 20/12 y 410 € el próximo 10/1. La tasa de descuento es del 7,5 % y la comisión del 2,5‰ con un mínimo de 3 €.

Solución: $C_0 = 44\,010,37$

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 3.1

$$C_0 = C_n(1 - d\,n) \qquad C_0 = 1\,869,75\,(1 - 0,005 \cdot 11) = 1\,766,91$$
$$D_c = 1\,869,75 - 1\,766,91 = 102,84$$

Solución ejercicio 3.2

$$D_c = C_n\,n\,d \qquad D_r = \frac{C_n\,n\,i}{1 + i\,n}$$
$$75\,150\,n\,0,03 = \frac{75\,150\,n\,0,03}{1 + 0,03\,n} + 0,30$$
$$2\,254,50\,n + 67,64\,n^2 = 2\,254,50\,n + 0,30 + 0,009\,n$$
$$67,64\,n^2 - 0,009\,n - 0{,}30 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-0,009^2 + 4 \cdot 67,64 \cdot 0,30}}{2 \cdot 67,64} = 0,066664$$
$$x = 0,066664 \cdot 365 = 24 \text{ días}$$

Solución ejercicio 3.3

$$C_0 = C_n(1 - d\,n) - g$$
$$C_0 = 2\,000\left(1 - 0,05\,\frac{60}{360} - 0,001\right) = 1\,981,33$$
$$C_0 = 2\,500\left(1 - 0,05\,\frac{36}{360} - 0,001\right) = 2\,485,00$$
$$(+) = 4\,466,33$$

Solución ejercicio 3.4

$$C_0 = C_n(1 - d\,n)$$
$$C_n = 800\left(1 + 0,05 \cdot \frac{30}{360}\right) = 803,33$$
$$C_n = 1\,500\left(1 + 0,05 \cdot \frac{5}{360}\right) = 1\,501,04$$
$$C_0 = \frac{3\,200}{1 + 0,05\,\frac{10}{360}} = 3\,195,56$$
$$(+) = 5\,499,93$$

Solución ejercicio 3.5

$$p = \frac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s}$$
$$\sum_{s=1}^{n} N_s = 3\,800 \cdot 2 + 7\,600 \cdot 5 + 11\,400 \cdot 8 = 136\,800$$
$$\sum_{s=1}^{n} C_s = 3\,800 + 7\,600 + 11\,400 = 22\,800 \qquad p = \frac{136\,800}{22\,800} = 6 \text{ meses}$$

Solución ejercicio 3.6

$$p = \frac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s}$$
$$\sum_{s=1}^{n} N_s = 5\,000 \cdot 10 + 5\,000 \cdot 15 + 5\,000 \cdot 30 + 5\,000 \cdot 90 = 725\,000$$
$$\sum_{s=1}^{n} C_s = 5\,000 \cdot 4 = 20\,000 \qquad p = \frac{725\,000}{20\,000} = 36 \text{ días}$$

Solución ejercicio 3.7

$$p = \frac{\sum_{s=1}^{n} N_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s}$$

$$\sum_{s=1}^{n} N_s = -6\,000 \cdot 40 + 2\,000 \cdot 30 = -180\,000$$

$$\sum_{s=1}^{n} C_s = -6\,000 + 2\,000 = -4\,000 \qquad p = \frac{-180\,000}{-4\,000} = 36 \text{ días}$$

Solución ejercicio 3.8

$$C_0 = C_n(1 - d\,n)$$

$$110\,000 = 30\,000\left(1 - d\frac{3}{12}\right) + 30\,000\left(1 - d\frac{6}{12}\right) + 30\,000\left(1 - d\frac{9}{12}\right) + 30\,000\,(1 - d)$$

$$110\,000 = 30\,000 - 7\,500\,d + 30\,000 - 15\,000\,d + 30\,000 - 22\,500\,d + 30\,000 - 30\,000\,d$$

$$75\,000\,d = 10\,000 \qquad d = \frac{10\,000}{75\,000} = 0,1333$$

Solución ejercicio 3.9

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + i\,n}$$

$$C_0 = 100\,000 + \frac{200\,000}{1 + 0,05\,\frac{6}{12}} + \frac{300\,000}{1 + 0,06}$$

$$C_0 = 100\,000 + 195\,121,95 + 283\,018,87 = 578\,140,82$$

Solución ejercicio 3.10

$$C_n = C_0\,(1 + i\,n)$$

$$C_n = 30\,300 + 20\,200\left(1 + 0,06\,\frac{3}{12}\right) + 10\,100\left(1 + 0,06\,\frac{6}{12}\right)$$

$$C_n = 30\,300 + 20\,503 + 10\,403 = 61\,206$$

Como a los 8 meses es el vencimiento medio, la cuantía será: 30 603

Solución ejercicio 3.11

$$C_0 = C_n\,(1 - d\,n - g)$$

$$C_0 = 45\,000\,(1 - 0,06\,\frac{70}{360} - 0,00075) = 44\,441,25$$

Solución ejercicio 3.12

$$D_c = C_n\,d\,n \qquad 3\,742 = C_n\frac{41}{360}0,0672$$

$$C_n = \frac{3\,742}{0,007653} = 488\,937,28$$

Solución ejercicio 3.13

$$D_r = C_0\,i\,n \qquad D_r = 23\,748,23 \cdot 0,05\frac{120}{360} = 395,80$$

Solución ejercicio 3.14

$$D_r = C_0\,i\,n \qquad 472,20 = C_0 \cdot 0,0622\frac{45}{360}$$

$$C_0 = \frac{472,20}{0,007775} = 60\,733,12$$

Solución ejercicio 3.15

$$d = \frac{i}{1 + i\,n} \qquad d = \frac{0,0739}{1 + 0,0739\dfrac{1}{2}} = 0,071267$$

Solución ejercicio 3.16

$$\begin{aligned}
&C_0 = C_n(1 - d\,n) - g\,C_n \\
&C_0 = 1\,500\left(1 - 0,06\frac{22}{360}\right) - 0,0015 \cdot 1\,500 = && 1\,494,50 - 2,25 = && 1\,492,25 \\
&C_0 = 3\,000\left(1 - 0,07\frac{55}{360}\right) - 0,0015 \cdot 3\,000 = && 2\,967,92 - 4,50 = && 2\,963,42 \\
&C_0 = 4\,000\left(1 - 0,08\frac{75}{360}\right) - 0,0015 \cdot 4\,000 = && 3\,933,33 - 6 = && 3\,927,33 \\
&C_0 = 500\left(1 - 0,08\frac{83}{360}\right) - 0,0015 \cdot 500 = && 490,78 - \underbrace{0,75}_{2} = && 488,78 \\
& && (+) = && 8\,871,78
\end{aligned}$$

Solución ejercicio 3.17

$$\begin{aligned}
&C_0 = C_n(1 - d\,n) - g\,C_n \\
&C_0 = 12\,800\left(1 - 0,075\frac{52}{360}\right) - 0,0025 \cdot 12\,800 = && 12\,661,33 - 32 = && 12\,629,33 \\
&C_0 = 31\,500\left(1 - 0,075\frac{67}{360}\right) - 0,0025 \cdot 31\,500 = && 31\,060,31 - 78,75 = && 30\,981,56 \\
&C_0 = 410\left(1 - 0,075\frac{88}{360}\right) - 0,0025 \cdot 410 = && 402,48 - \underbrace{1,03}_{3} = && 399,48 \\
& && (+) = && 44\,010,37
\end{aligned}$$

4

Capitalización y descuento compuesto

4.1. Capitalización compuesta
4.1.1. Magnitudes derivadas
4.2. Comparación entre la capitalización simple y compuesta
4.3. Equivalencia de tantos en capitalización compuesta
4.4. Capitalización compuesta en tiempo fraccionario
4.4.1. Convenio exponencial
4.4.2. Convenio lineal
4.5. Capitalización continua
4.6. Descuento compuesto
4.6.1. Descuento racional compuesto
4.6.2. Descuento comercial compuesto
4.6.3. Tanto de interés equivalente a uno de descuento
Ejercicios propuestos
Resolución de los ejercicios propuestos

4.1. Capitalización compuesta

Se denomina así, a la operación financiera según la cual los intereses producidos por un capital en cada periodo se agregan al capital para calcular los intereses del periodo siguiente y así sucesivamente hasta el momento de cierre de la operación financiera.

La *capitalización compuesta* o interés compuesto, es una operación financiera generalmente a largo plazo (con una duración superior al año) en la que los intereses se acumulan al capital al final de cada periodo.

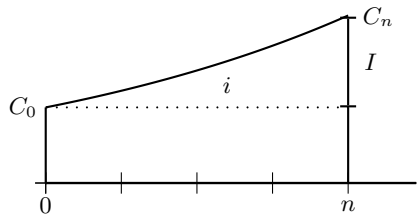


Figura 4.1: Capitalización compuesta

Las variables a considerar, son:

C_0 = valor actual o capital inicial,
I = intereses,
C_n = valor final o montante de la operación,
i = tasa de interés,
n = número de períodos.

En cualquier caso, n e i, han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

En la capitalización compuesta, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses. El valor final C_n en capitalización compuesta, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0\,(1+i)\\
&C_2 = C_1 + C_1\, i = C_0\,(1+i)\,(1+i) = C_0\,(1+i)^2\\
&C_3 = C_2 + C_2\, i = C_0\,(1+i)^2\,(1+i) = C_0\,(1+i)^3\\
&\vdots\\
&C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, i = C_0\,(1+i)^{n-1}\,(1+i) = C_0\,(1+i)^n
\end{aligned}$$

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \tag{4.1}$$

expresión que relaciona el montante o capital final, transcurridos n períodos de capitalización, con el capital inicial prestado. ∎

A la expresión $(1+i)^n$ la denominaremos *factor de capitalización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor actual nos permite obtener el valor final o montante equivalente.

Independientemente de la ley financiera utilizada, los intereses generados, serán la diferencia entre el capital final e inicial, y por tanto:

$$C_n = C_0 + I \qquad I = C_n - C_0 \qquad I = C_0\,(1+i)^n - C_0$$

$$I = C_0\big[(1+i)^n - 1\big] \tag{4.2}$$

La capitalización compuesta consiste en un proceso de acumulación de los intereses al capital para producir conjuntamente nuevos intereses, periodo tras periodo, hasta llegar al final de la operación financiera. Gráficamente, la acumulación de intereses, se vería tal como se muestra en la figura 4.2.

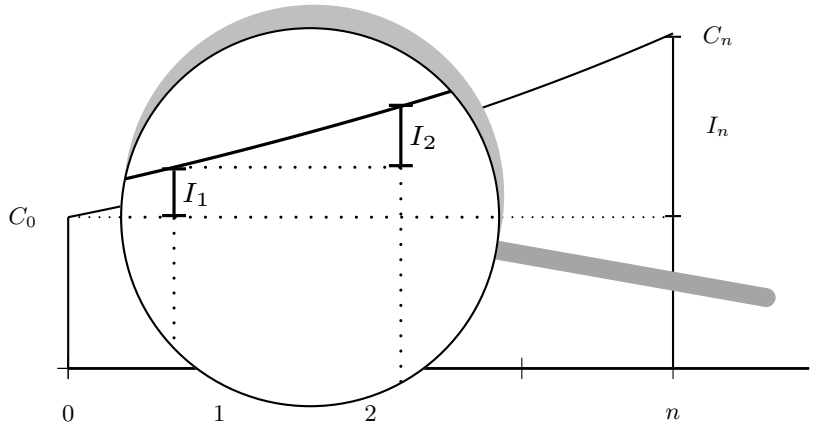


Figura 4.2: Acumulación de intereses en la capitalización compuesta

Ejemplo 4.1 Determinar el montante de un capital de 1 000 €, invertido al 6 % de interés compuesto anual durante 10 años.

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \qquad C_n = 1\,000\,(1+0,06)^{10} = 1\,790,85$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener C_n,

1000 [CHS] [PV] 10 [n] 6 [i] [FV] obteniendo la respuesta de 1 790, 85

4.1.1. Magnitudes derivadas

Si despejamos C_0 en (4.1), resulta:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad \text{o} \qquad C_0 = C_n(1+i)^{-n} \tag{4.3}$$

La expresión $(1+i)^{-n}$ recibe el nombre de *factor de actualización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor final obtenemos el capital inicial o valor actual.

Para calcular n, tomando logaritmos y partiendo de $C_n = C_0\,(1+i)^n$,

$$\log C_n = \log C_0 + n\log(1+i)$$

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} \tag{4.4}$$

Partiendo de la propia ley (4.1), despejaremos i,

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \qquad \frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n \qquad \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} = (1+i)$$

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{4.5}$$

Ejemplo 4.2 Determinar el capital a invertir en capitalización compuesta al 5 % de interés para que en 4 años se convierta en 6 000 €.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad C_0 = \frac{6\,000}{(1+0,05)^4} = 4\,936,21$$

Con la calculadora financiera, para obtener C_0,

5 [i] 4 [n] 6000 [FV] [PV] obteniendo como respuesta $-4\,936,21$

Ejemplo 4.3 Determinar el tipo de interés i al que deben invertirse 1 000 € para obtener en 8 años un montante de 1 368,57 €.

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad i = \left(\frac{1\,368,57}{1\,000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0,04 = 4\,\%$$

Con la calculadora financiera, para obtener i,

1000 [CHS] [PV] 8 [n] 1368, 57 [FV] [i] obteniendo el valor 4

Ejemplo 4.4 Determinar el tiempo necesario para que un capital de 2 000 € colocado a interés compuesto del 5 % anual, se convierta en 5 306,60 €.

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} \qquad n = \frac{\log 5\,306,60 - \log 2\,000}{\log(1+0,05)} = 20 \text{ años}$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener n,

2000 [CHS] [PV] 5 [i] 5306, 6 [FV] [n] obteniendo el resultado de 20[1]

4.2. Comparación entre la capitalización simple y compuesta

Los montantes obtenidos en la capitalización simple y compuesta, son:

$C_n = C_0\,(1 + i\,n)$ Capitalización simple (L_1),
$C_n = C_0\,(1+i)^n$ Capitalización compuesta (L_2).

Ambas expresiones se diferencian entre sí por los factores de capitalización: $(1+i)^n$ en la capitalización compuesta y $(1+i\,n)$ en la capitalización simple.

Si representamos gráficamente las funciones, obtendríamos la figura 4.3.

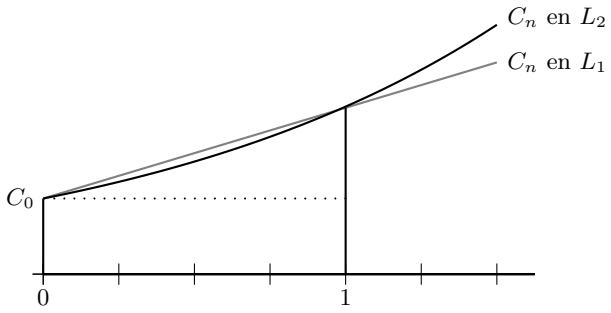


Figura 4.3: Comparación entre la capitalización simple y compuesta

De la comparación podemos decir que el montante de capitalización es *mayor* en la capitalización simple para periodos inferiores al año, *igual* para un año y *menor* para los periodos superiores al año.

Podemos concluir diciendo que la capitalización simple puede considerarse como una simplificación práctica de la compuesta, cuando el número de períodos varía entre 0 y 1, es decir, cuando se opera a corto plazo.

[1] En la HP12c el resultado obtenido siempre es un número entero. Otras calculadoras u hojas de cálculo darán la solución matemática exacta incluyendo decimales, sin embargo, en la solución al tiempo la parte fraccionaria supone un pago adicional de menor cuantía y no una fracción del tiempo como indica el soporte de la calculadora de HP.

4.3. Equivalencia de tantos en capitalización compuesta

En la capitalización compuesta no existe proporcionalidad entre los tantos de interés referidos a distintos períodos de tiempo, al contrario que en la simple.

En la capitalización simple, el capital final que se obtiene al cabo de n años al tipo de interés i, es el mismo que el obtenido al cabo de $n\,m$ períodos al tipo de interés $i^{(m)}$, siendo $i^{(m)}$ la m-ésima parte de i, y m el número de subperíodos en los que dividimos al año.

Es decir, se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} C_n = C_0\,(1+i\,n) \\ C_{n\,m} = C_0\left(1+i^{(m)}\,n\,m\right) \end{array}\right\} \text{ siendo } i^{(m)} = \frac{i}{m}, \text{ tendremos que } C_n = C_{n\,m}$$

En la capitalización compuesta, no existe esta proporcionalidad, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} C_n = C_0\,(1+i)^n \\ C_{n\,m} = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \end{array}\right\} \text{ siendo } i^{(m)} = \frac{i}{m}, \text{ se cumplirá que } C_n \neq C_{n\,m}$$

Por tanto, en capitalización compuesta es importante conocer la frecuencia de capitalización, que designaremos por m, cuando ésta es inferior al año y que ya definimos (véase 2.1 en la página 9) como el número de veces que los intereses se incorporan al capital dentro del año.

Tendremos que determinar, en el régimen de capitalización compuesta de tanto efectivo anual i, el tanto de frecuencia $i^{(m)}$ que debe regir para otra capitalización compuesta de periodo m-ésimo, de forma que ambas capitalizaciones sean equivalentes.

El montante al cabo de n años en capitalización compuesta al tanto efectivo i, es:

$$C_n = C_0\,(1+i)^n$$

En capitalización compuesta al tanto de frecuencia $i^{(m)}$, el montante al cabo de n años, es decir $n\,m$, m-ésimos de año es,

$$C_n = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}$$

La equivalencia implica la igualdad de montantes, por lo que,

$$C_0\,(1+i)^n = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \qquad (1+i)^n = \left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}$$

extrayendo la raíz n en ambos miembros,

$$\left(1+i^{(m)}\right)^m = 1+i \tag{4.6}$$

ecuación de los tantos equivalentes o *equivalencia de tantos.* ∎

Podemos concluir que dos tantos son equivalentes cuando aplicado el proceso de capitalización compuesta al mismo capital inicial y durante el mismo tiempo producen capitales finales iguales.

Si en (4.6), extraemos la raíz m-ésima, tendremos:

$$1+i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \text{ de donde } i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

expresión que nos permite conocer el tanto de frecuencia en función del *tanto efectivo anual*. Análogamente,

$$i = \left(1+i^{(m)}\right)^m - 1$$

La TAE (Tasa Anual Equivalente o Efectiva), regulada para las Entidades de Crédito en la Circular 8/90, de 7 de septiembre, intenta ser una *unidad homogénea de medida*. Esta tasa incluye el efecto de determinados gastos, como las comisiones que afectan el coste o rendimiento final de la operación. Esta forma de cálculo indica expresamente las partidas que deben incluirse tanto en la prestación como en la contraprestación, dejando fuera muchas veces cantidades que suponen un incremento en el coste efectivo para el sujeto pasivo. Si no existen gastos en una operación financiera, la TAE coincidirá con el interés efectivo anual i.

Por otra parte, se define el *tanto nominal* $J^{(m)}$, como un tanto teórico que se obtiene multiplicando la frecuencia de capitalización m por el tanto de frecuencia o equivalente.

$$J^{(m)} = m\, i^{(m)} \tag{4.7}$$

Este recibe también el nombre de TIN (Tipo de Interés Nominal anual). En la figura 4.4 puede verse la representación gráfica. ∎

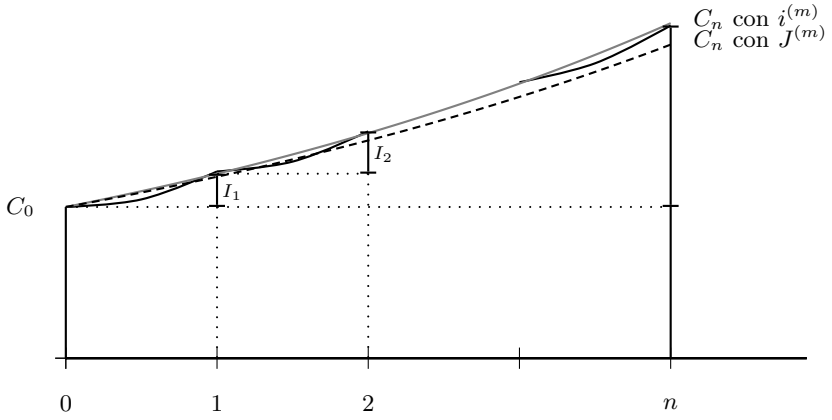


Figura 4.4: Equivalencia de tantos

Ejemplo 4.5 Determinar el montante de un capital de 7 500 € invertido al 6 % anual capitalizable por trimestres durante 10 años.

Utilizando el tanto de frecuencia equivalente,

$$i^{(4)} = \frac{J^{(4)}}{4} = \frac{0,06}{4} = 0,015$$

$$C_{n\,m} = C_0 \left(1 + i^{(m)}\right)^{n\,m} = 7\,500\,(1 + 0,015)^{10\cdot 4} = 13\,605,14$$

Calculando previamente el tanto efectivo anual,

$$i = \left(1 + i^{(m)}\right)^{m} - 1 = (1 + 0,015)^4 - 1 = 0,06136$$

$$C_n = C_0\,(1 + i)^n = 7\,500\,(1 + 0,06136)^{10} = 13\,605,14$$

Utilizando la calculadora para convertir el tipo de interés,

6 [ENTER] 4 [n] [÷] [i] 100 [CHS] [ENTER] [PV] [FV] [+] obteniendo 6, 1364

Para obtener C_n con la calculadora desde el punto anterior,

[i] 10 [n] 7500 [CHS] [PV] [FV] con el resultado de 13 605, 14

Si queremos obtener el interés nominal a partir del efectivo,

4 [n] 100 [ENTER] [PV] 6, 1364 [+] [CHS] [PV] [i] [RCL] [n] [×] obteniendo 6

4.4. Capitalización compuesta en tiempo fraccionario

La capitalización compuesta fue establecida para valores de n expresados en un número entero de años.

Si suponemos que dado el tanto anual i, el tiempo z, no es entero, sino fraccionario, se podrá expresar de la forma,

$$z = n + \theta$$

en la que n es un número entero y θ decimal. Para la obtención del montante, puede utilizarse uno de los convenios siguientes:

4.4.1. Convenio exponencial

Consiste en tomar como valor del montante al cabo del tiempo n, cualquiera que sea éste, la expresión exponencial:

$$C_n = C_0\,(1+i)^{n+\theta}$$

4.4.2. Convenio lineal

Consiste en capitalizar a interés compuesto por el número entero de años que contenga el tiempo y a interés simple por la fracción de año restante.

El montante, según este convenio, será:

$$C_n = C_0\,(1+i)^n(1+\theta\,i)$$

estando lógicamente θ e i referidos a la misma unidad de tiempo.

Ejemplo 4.6 Calcular el montante de un capital de 10 000 € al 4 % anual en 10 años y 3 meses.

Aplicando el convenio exponencial,

$$C_n = C_0\,(1+i)^{n+\theta} = 10\,000\,(1+0,04)^{10+\frac{3}{12}} = 14\,948,30$$

Con el convenio lineal,

$$C_n = C_0\,(1+i)^n(1+\theta\,i) = 10\,000\,(1+0,04)^{10}\left(1+\frac{3}{12}\,0,04\right) = 14\,950,47$$

Utilizando la calculadora financiera podremos determinar los valores según ambos convenios que se conmutan con [STO] [EEX] apareciendo el indicador C en la pantalla para el convenio lineal.

10 [ENTER] 3 [ENTER] 12 [÷] [+] [n] 4 [i] 10 000 [CHS] [PV] [FV]

obteniendo con el convenio exponencial 14 948, 30

[STO] [EEX] [FV] [FV] con el resultado por el convenio lineal 14 950, 47

4.5. Capitalización continua

La capitalización continua, constituye un caso particular de la capitalización compuesta. Cuando el número de fraccionamientos m tiende a infinito, los intereses se capitalizan instantáneamente y nos encontramos ante la capitalización continua.

Hemos visto que el montante, en capitalización compuesta, al tanto de frecuencia $i^{(m)}$, en n años, venía dado por:

$$C_n = C_0 \left(1 + i^{(m)}\right)^{n\,m} = C_0 \left(1 + \frac{J^{(m)}}{m}\right)^{n\,m}$$

Si $m \to \infty$, $J^{(m)} = J^{(\infty)} = \delta$, este último será el tanto nominal anual en el caso de capitalización continua, y el montante vendrá dado por:

$$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0 \left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{n\,m} \tag{4.8}$$

Si e, base de los logaritmos neperianos, es:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = 2,7182818\ldots$$

y transformando (4.8) con $m = x\ \delta$,

$$C_n = \lim_{x\to\infty} C_0 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n\,x\,\delta} = C_0 \left[\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{n\,\delta} = C_0\, e^{n\,\delta}$$

por lo que el montante en el caso de la capitalización continua, viene dado por la expresión

$$C_n = C_0\, e^{n\,\delta} \tag{4.9}$$

en la que δ, tanto nominal en capitalización continua, recibe también el nombre de *fuerza de interés*. ∎

Para obtener la equivalencia entre la fuerza de interés y la tasa efectiva, igualamos $C_0\, e^{n\,\delta} = C_0\,(1+i)^n$. En consecuencia, $e^{J^{(m)}} = (1+i)$, y por tanto,

$$i = e^{J^{(m)}} - 1$$

lo que nos permite obtener la tasa efectiva i y aplicar la expresión de la capitalización compuesta (4.1) de la página 40.

Ejemplo 4.7 Determinar el montante obtenido con una inversión de 1 000 € que en capitalización continua se impone al 6 % durante 4 años.

$$C_n = C_0\, e^{n\,\delta} \qquad C_n = 1\,000\, e^{4\cdot 0,06} = 1\,271,25$$

Con la calculadora financiera, podríamos obtener previamente i,

1 [ENTER] 6 [%] [g] [e^x] [△ %] con el resultado de 6, 1837

procediendo con este valor de i de forma convencional con la expresión (4.1).

4.6. Descuento compuesto

Se denomina así la operación financiera que tiene por objeto la sustitución de un capital futuro por otro con vencimiento presente, mediante la aplicación de una ley financiera de descuento compuesto. Es una operación inversa a la de capitalización compuesta.

Los elementos a tener en cuenta son:

D = descuento o rebaja que sufre una cantidad pagada antes de su vencimiento,
C_n = nominal o cantidad que se debe pagar al vencimiento,
C_0 = efectivo o cantidad realmente pagada.

Por definición el descuento experimentado por el nominal C_n, como consecuencia de anticipación desde su vencimiento en el momento n, al momento presente 0, será:

$$D = C_n - C_0$$

4.6.1. Descuento racional compuesto

Se define como el interés del efectivo, durante el tiempo que falta para su vencimiento. Al descuento racional compuesto lo designaremos por D_{rc} y se calcula sobre el valor del efectivo.

De la capitalización compuesta (4.1),

$$C_n = C_0\,(1+i)^n$$

obtenemos el valor actual,

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n}$$

por lo que el descuento racional compuesto, será:

$$D_{rc} = C_n - C_0 = C_n - C_n(1+i)^{-n} = C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

$$D_{rc} = C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] \tag{4.10}$$

4.6.2. Descuento comercial compuesto

Se define como el interés del nominal durante el tiempo que falta para su vencimiento. Al descuento comercial compuesto, lo designamos por D_{cc} y se calcula sobre el valor nominal.

$$\begin{aligned}
C_{n-1} &= C_n - d\,C_n = C_n(1-d)\\
C_{n-2} &= C_{n-1} - d\,C_{n-1} = C_{n-1}(1-d) = C_n(1-d)\,(1-d) = C_n(1-d)^2\\
C_{n-3} &= C_{n-2} - d\,C_{n-2} = C_{n-2}(1-d) = C_n(1-d)^2\,(1-d) = C_n(1-d)^3\\
&\vdots\\
C_0 &= C_1 - d\,C_1 = C_1(1-d) = C_n(1-d)^{n-1}(1-d) = C_n(1-d)^n
\end{aligned}$$

$$C_0 = C_n(1-d)^n \tag{4.11}$$

Y el valor del descuento comercial compuesto, será:

$$D_{cc} = C_n - C_0 = C_n - C_n(1-d)^n = C_n\left[1-(1-d)^n\right]$$

$$D_{cc} = C_n\left[1-(1-d)^n\right] \tag{4.12}$$

4.6.3. Tanto de interés equivalente a uno de descuento

Igual que veíamos en la capitalización simple, podemos encontrar un tanto de descuento equivalente a uno de interés. Para ello, igualamos $D_{rc} = D_{cc}$,

$$C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] = C_n\left[1-(1-d)^n\right]$$

$$(1+i)^{-n} = (1-d)^n \qquad (1+i)^{-1} = 1-d \qquad 1-d = \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d} \tag{4.13}$$

Ejemplo 4.8 Tenemos que pagar una deuda de 24 000 € dentro de 3 años. Si se adelanta su pago al momento presente, qué descuento nos harán si se realiza a una tasa de descuento compuesto del 5 %

Con el descuento racional,

$$D_{rc} = C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] \qquad D_{rc} = 24\,000\left[1-(1,05)^{-3}\right] = 3\,267,90$$

Con el descuento comercial,

$$D_{cc} = C_n\left[1-(1-d)^n\right] \qquad D_{cc} = 24\,000\left[1-(1-0,05)^3\right] = 3\,423$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1 Una persona impone 100 000 € durante 6 años al 5 % de interés compuesto. Al cabo de 3 años, se eleva el tipo de interés en las imposiciones a plazo fijo, al 6 %. Se desea saber al término de los 6 años, cuál ha sido el capital retirado y cuál hubiera sido de no haberse producido la modificación indicada.

Solución: a) 137 874, 99 b) 134 009, 56

Ejercicio 4.2 Sabiendo que un capital de cuantía C se ha impuesto en un banco que capitaliza semestralmente, al cabo de 20 años se ha constituido en $3C$, obtener razonadamente las expresiones de:

1. El tanto efectivo anual,
2. El tanto nominal anual,
3. El tanto efectivo semestral.

Solución: 1) $i = 5,65\,\%$ 2) $J = 5,57\,\%$ 3) $i^{(2)} = 2,78\,\%$

Ejercicio 4.3 Calcular:

1. El tanto efectivo anual correspondiente al 6 % nominal cuando se capitaliza por meses.
2. El nominal anual correspondiente al 6 % efectivo cuando se capitaliza por trimestres.

Solución: 1) $i = 6,17\,\%$ 2) $J^{(4)} = 5,87\,\%$

Ejercicio 4.4 Imponemos durante 2 años y 8 meses 10 000 €, por las que nos pagan el 10 % de interés compuesto anual ¿Qué cantidad nos dará el banco al finalizar el período?

1. Al aplicar el convenio lineal,

2. Con el convenio exponencial.

Solución: 1) $C_n = 12\,906,67$ 2) $C_n = 12\,893,79$

Ejercicio 4.5 Una deuda de 10 000 € debe ser devuelta al cabo de 39 meses. Si el tanto de capitalización es del 5 % anual, determinar el importe a devolver

1. Al aplicar el convenio lineal,
2. Con el convenio exponencial.

Solución: 1) $C_n = 11\,720,95$ 2) $C_n = 11\,718,32$

Ejercicio 4.6 ¿Cuánto tiempo es preciso colocar un capital de 35 000 € al 5 % para conseguir en régimen de capitalización compuesta un montante de 45 000 €?

Solución: $u = 5$ años 1 mes 24 días

Ejercicio 4.7 Pactamos con un acreedor que abonándole hoy 50 000 € a cuenta de 200 000 € que habíamos de pagarle dentro de 2 años, podremos hacerle efectivas 160 000 € dentro de 4 años. ¿A qué tipo de interés compuesto se evaluó la operación?

Solución: $i = 5,146\,\%$

Ejercicio 4.8 Si el tanto a que se ha colocado un capital a interés compuesto durante 15 años hubiera sido el triple del que fue, se habría obtenido un capital del triple del que se obtuvo. Hallar el tanto.

Solución: $i = 3,949\,\%$

Ejercicio 4.9 ¿En qué tiempo el monto de 25 000 € serán 35 000 € al 6 % convertible trimestralmente?

Solución: $u = 5$ años 7 meses 23 días

Ejercicio 4.10 ¿Qué capital colocado al 5 % durante 10 años a interés compuesto se convierte en 97 734 €? ¿Cuánto valdrá este capital al final del año tercero?

Solución: $C_0 = 60\,000,20$ $C_n = 69\,457,73$

Ejercicio 4.11 Un capital ha sido invertido al 12,36 % efectivo anual compuesto en capitalización semestral durante 20 años. El interés producido en el último semestre fue de 291 105,3. ¿Cuál fue el capital invertido y cuál el montante obtenido?

Solución: $C_0 = 500\,000$ $C_n = 5\,142\,860,30$

Ejercicio 4.12 Un capital de 50 000 € ha sido colocado en régimen de capitalización compuesta alcanzando un montante de 150 000 €. Otro capital colocado al mismo tanto y régimen ha alcanzado el mismo montante en la mitad de tiempo. ¿Cuál es la cuantía de dicho capital?

Solución: $C_0 = 86\,602,54$

Ejercicio 4.13 Se asocian tres inversores e imponen un capital de 500 000 € en la explotación de un negocio. Al cabo de seis años lo liquidan y por capital e intereses, se reparten: 329 245,89 € el socio A, 548 743,32 € el socio B y 219 497,26 € el socio tercero C. Determinar la imposición de cada uno de los socios y el tanto de interés de la inversión.

Solución: $C_0^A = 150\,000$ $C_0^B = 250\,000$ $C_0^C = 100\,000$ $i = 14\,\%$

Ejercicio 4.14 Un inversor tiene la opción de colocar dos capitales de cuantías C_1 y C_2 a los tipos de interés anuales acumulativos del 8 % y 9 %. Si coloca C_1 al 8 % y C_2 al 9 % retiraría al cabo de 6 años 895 337,30 € y si coloca C_1 al 9 % y C_2 al 8 % obtendría 899 848,60 €. ¿Qué cuantías son C_1 y C_2?

Solución: $C_0^1 = 300\,000$ $C_0^2 = 250\,000$

Ejercicio 4.15 Se han prestado 150 000 € para que sean devueltos después de 6 años al 20 % de interés bienal (cada dos años) acumulativo.

1. ¿Qué cantidad se tendrá que devolver?
2. ¿Y si se acuerda prorrogar durante un año más la devolución de la deuda capitalizando dicho año al tanto de interés anual equivalente al bienal dado?

Solución: 1) $C_n = 259\,200$ 2) $C_n = 283\,939,37$

Ejercicio 4.16 Conocido el tanto de interés efectivo semestral del 5 %, determinar el efectivo anual, el nominal convertible de frecuencia 2 y el efectivo trimestral.

Solución: $i = 10,25\,\%$ $J^{(2)} = 10\,\%$ $i^{(4)} = 2,47\,\%$

Ejercicio 4.17 Una deuda de 22 500 € debe ser devuelta al cabo de 27 meses. Si el tanto efectivo anual de capitalización es el 9 % determinar el importe a devolver.

Solución: $C_n = 27\,314,43$

Ejercicio 4.18 Si se desea cancelar una deuda de 125 000 € dentro de tres años, calcular el capital a entregar en los supuestos:

1. Tanto de interés del 6 % semestral,
2. Tanto de descuento del 10 % anual efectivo,
3. Tanto de descuento del 10 % anual con frecuencia 2

Solución: 1) $C_n = 177\,314,89$ 2) $C_n = 171\,467,76$ 3) $C_n = 170\,046,77$

Ejercicio 4.19 500 000 € colocados al 10 % de interés compuesto se convierten en n años en 885 780,50 €. ¿A qué tanto de interés simple tendrían que invertirse para que en el mismo tiempo generasen el mismo montante? ¿Cuánto tiempo tendrían que imponerse para el tanto del 10 % en interés simple?

Solución: $i = 12,86\,\%$ $n = 7$ años 8 meses 17 días

Ejercicio 4.20 Una entidad lanza un depósito a un año con un interés nominal del 12 % el primer mes y un 3,70 % el resto. Determinar el tanto efectivo de la operación.

Solución: $i = 4,479\,\%$

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 4.1

$$C_n = C_0(1+i)^n$$
$$C_n = 100\,000\,(1+0,05)^3(1+0,06)^3 = 137\,874,99$$

Y si no se modifica el tipo de interés,

$$C_n = 100\,000\,(1+0,05)^6 = 134\,009,56$$

Solución ejercicio 4.2

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \qquad 3\,C = C\left(1+i^{(2)}\right)^{20\cdot 2}$$
$$\left(\frac{3\,C}{C}\right)^{\frac{1}{40}} - 1 = i^{(2)} \qquad i^{(2)} = 0,0278$$

1. Si $i = (1+i)^{(m)} - 1$

$$i = (1+0,0278)^2 - 1 \qquad i = 0,0565$$

2. Si $J^{(m)} = m\,i^{(m)}$

$$J^{(2)} = 2 \cdot 0,0278 \qquad J^{(2)} = 0,0565$$

3. Es el valor que hemos obtenido directamente al resolver la ecuación inicial, por tanto $i^{(2)} = 0,0278$

Solución ejercicio 4.3

$$J^{(m)} = m\,i^{(m)} \qquad i = \left(1+i^{(m)}\right)^m - 1$$

1. Para el valor capitalizado mensual,

$$i^{(12)} = \frac{0,06}{12} = 0,0050 \qquad i = (1+0,0050)^{12} - 1 = 0,0617$$

2. Para el valor capitalizado trimestral,

$$i^{(4)} = (1+0,06)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,01467 \qquad J^{(4)} = 0,01467 \cdot 4 = 0,0587$$

Solución ejercicio 4.4

$$C_n = C_0\ (1+i)^n(1+\theta\,i) \qquad C_n = C_0(1+i)^{n+\theta}$$

1. Según el convenio lineal,

$$C_n = 10\,000\,(1+0,1)^2\left(1+\frac{8}{12}0,1\right) = 12\,906,67$$

2. Con el convenio exponencial,

$$C_n = 10\,000\,(1+0,1)^{2+\frac{8}{12}} = 12\,893,79$$

Solución ejercicio 4.5

$$C_n = C_0\ (1+i)^n(1+\theta\,i) \qquad C_n = C_0(1+i)^{n+\theta}$$

1. Con el convenio lineal,

$$C_n = 10\,000\,(1+0,05)^3\left(1+\frac{3}{12}0,05\right) = 11\,720,95$$

2. Aplicando el convenio exponencial,

$$C_n = 10\,000\,(1+0,05)^{\frac{39}{12}} = 11\,718,32$$

Solución ejercicio 4.6

$$C_n = C_0\ (1+i)^n$$
$$45\,000 = 35\,000\,(1+0,05)^n \qquad n = \frac{\log 45\,000 - \log 35\,000}{\log 1,05} = 5,1509$$
$$n = 5 \text{ años} \qquad 0,1509 \cdot 12 = 1 \text{ mes} \qquad 0,8111 \cdot 30 = 24 \text{ días}$$

Solución ejercicio 4.7 Igualamos todos los capitales con la ley de capitalización compuesta en el momento final. Sustituimos el factor de capitalización $(1+i)^n$ por x a fin de facilitar los cálculos,

$$200\,000\,(1+i)^2 = 50\,000\,(1+i)^4 + 160\,000 \qquad \text{sustituyendo, } x = (1+i)^2$$
$$-50x^2 + 200x - 160 = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$
$$x = \frac{200 \pm \sqrt{-200^2 - 4 \cdot 50 \cdot 160}}{2 \cdot 50} = 1,105573 \qquad (1+i)^2 = 1,105573$$
$$i = \sqrt{1,105573} - 1 \qquad i = 0,051462 \approx 5,146\,\%$$

Solución ejercicio 4.8

$$\left.\begin{array}{c} C_n = C_0(1+i)^{15} \\ 3\,C_n = C_0(1+3i)^{15} \end{array}\right\}$$
$$C_n = (1+i)^{15} \qquad 3^{\frac{1}{15}}(1+i) = (1+3\,i)$$
$$3^{\frac{1}{15}} + 3^{\frac{1}{15}} i = 1 + 3\,i \qquad 1,075990 + 1,075990\,i = 1 + 3\,i$$
$$0,075990 = 1,924010\,i \qquad i = \frac{0,076990}{1,924010} \qquad i = 0,039496 \approx 3,949\,\%$$

Solución ejercicio 4.9

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad 35\,000 = 25\,000\left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^n$$
$$n = \frac{\log 35\,000 - \log 25\,000}{\log 1,0150} = 22,5993$$
$$\frac{22,5993}{4} = 5,6498 = 5 \text{ años} \qquad 0,6498 \cdot 12 = 7 \text{ meses} \qquad 0,7979 \cdot 30 = 23 \text{ días}$$

La respuesta debe darse siempre en años, meses y días.

Solución ejercicio 4.10

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_0 = \frac{97\,734}{(1+0,05)^{10}} \qquad C_0 = 60\,000$$
$$C_n = 60\,000\,(1+0,05)^3 \qquad C_n = 69\,457,73$$

Solución ejercicio 4.11 Teniendo en cuenta que los intereses son los que se han producido solo en el último semestre,

$$i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \qquad i^{(2)} = (1+0,1236)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,06$$
$$I = C_{39}\,i \qquad 291\,105,3 = C_{39}\,0,06 \qquad C_{39} = \frac{291\,105,3}{0,06} = 4\,851\,755$$
$$C_0 = \frac{C_{19}}{(1+i)^n} \qquad C_0 = \frac{4\,851\,755}{(1+0,06)^{39}} \qquad C_0 = 500\,000,13$$
$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_n = 500\,000,13(1+0,06)^{40} \qquad C_n = 5\,142\,860,30$$

Solución ejercicio 4.12

$$\left.\begin{array}{c} 150\,000 = 50\,000(1+i)^n \\ 150\,000 = C(1+1)^{\frac{n}{2}} \end{array}\right\} \text{ Si, } x = (1+i)^{\frac{n}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{c} 150\,000 = 50\,000x^2 \\ 150\,000 = Cx \end{array}\right\}$$

$$x^2 = \frac{150\,000}{50\,000} = 3 \qquad x = 1,732051$$
$$C = \frac{150\,000}{x} \qquad C = 86\,602,54$$

Solución ejercicio 4.13

$$\left.\begin{array}{c} 329\,245,89 = C_0^A(1+i)^6 \\ 548\,743,22 = C_0^B(1+i)^6 \\ 219\,497,26 = C_0^C(1+i)^6 \\ 500\,000 = C_0^A + C_0^B + C_0^C \end{array}\right\}$$

$$x = (1+i)^6 \qquad 500\,000 = \frac{329\,245,89}{x} + \frac{548\,743,32}{x} + \frac{219\,497,26}{x}$$

$$500\,000\,x = 329\,245,89 + 548\,743,32 + 219\,492,26$$

$$x = \frac{1\,097\,486,47}{500\,000} \qquad x = 2,194973$$

$$(1+i)^6 = 2,194973 \qquad i = 2,194973^{\frac{1}{6}} - 1 \qquad i = 0,14$$

$$C_0^A = \frac{329\,245,89}{(1+0,14)^6} \qquad C_0^A = 150\,000$$

$$C_0^B = \frac{548\,743,32}{(1+0,14)^6} \qquad C_0^B = 250\,000$$

$$C_0^C = 500\,000 - 150\,000 - 250\,000 \qquad C_0^C = 100\,000$$

Solución ejercicio 4.14

$$\left.\begin{array}{c} C_0^1(1+0,08)^6 + C_0^2(1+0,09)^6 = 895\,337,30 \\ C_0^1(1+0,09)^6 + C_0^2(1+0,08)^6 = 899\,848,60 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 1,586874C_0^1 + 1,677100C_0^2 = 895\,337,30 \\ 1,677100C_0^1 + 1,586874C_0^2 = 899\,848,60 \end{array}\right\}$$

$$C_0^1 = \frac{895\,337,30 - 1,677100C_0^2}{1,586874}$$

$$1,677100\left(\frac{895\,337,30 - 1,677100C_0^2}{1,586874}\right) + 1,586874C_0^2 = 899\,848,60$$

$$1\,501\,570,29 - 2,812664C_0^2 + 2,518170C_0^2 = 1\,427\,946,64$$

$$1\,501\,570,29 - 1\,427\,946,64 = 2,812664C_0^2 - 2,518170C_0^2$$

$$73\,623,65 = 0,294494C_0^2 \qquad C_0^2 = \frac{73\,623,65}{0,294494} \qquad C_0^2 = 250\,000$$

$$1,586874C_0^1 + 1,677100 \cdot 250\,000 = 895\,337,30$$

$$C_0^1 = \frac{895\,337,30 - 419\,275}{1,586874} \qquad C_0^1 = 300\,000$$

Solución ejercicio 4.15

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_n = 150\,000(1+0,20)^3 \qquad C - n = 259\,200$$

$$C_n = 150\,000(1+0,20)^{3,5} \qquad C_n = 283\,939,27$$

Solución ejercicio 4.16

$$(1+i) = \left(1 + i^{(m)}\right)^m \qquad J^{(m)} = m\,i^{(m)}$$

$$i = (1+0,05)^2 - 1 \qquad i = 0,1025 \approx 10,25\,\%$$

$$J^{(2)} = 2 \cdot 0,05 \qquad J^{(2)} = 0,10 \approx 10$$

$$i^{(4)} = (1+0,1025)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,024695 \approx 2,47\,\%$$

Solución ejercicio 4.17

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

$$C_n = 22\,500(1+0,09)^{\frac{27}{12}} \qquad C_n = 27\,314,43$$

Solución ejercicio 4.18

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_0 = C_n(1-d)^n$$

1. Con el interés semestral y el tiempo en semestres,

$$C_n = 125\,000(1+0,06)^{3\cdot 2} \qquad C_n = 177\,314,89$$

2. Utilizando el tanto efectivo de descuento,

$$125\,000 = C_n(1-0,10)^3 \qquad C_n = 171\,467,76$$

3.

$$125\,000 = C_n(1-0,05)^{3\cdot 2} \qquad C_n = 170\,046,77$$

Solución ejercicio 4.19

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad 885\,780,50 = 500\,000(1+i)^n$$
$$1,1^n = \frac{885\,780,50}{500\,000} = 1,771561$$
$$n\log 1,1 = \log 1,771561 \qquad n = \frac{\log 1,771561}{\log 1,1} \qquad n = 6 \text{ años}$$

1. El tipo i en capitalización simple,

$$500\,000(1+i\,6) = 885\,780,50 \qquad 500\,000 + 3\,000\,000\,i = 885\,780,50$$
$$i = \frac{335\,780,50}{3\,000\,000} = 0,128594$$

2. Para el cálculo del tiempo,

$$500\,000(1+0,10\,n) = 885\,780,50 \qquad 500\,000 + 50\,000\,n = 885\,780,50$$
$$n = \frac{335\,780,50}{50\,000} \qquad n = 6,715610$$
$$n = 6 \text{ años} \qquad 0,715610 \cdot 12 = 8 \text{ meses} \qquad 0,587320 \cdot 30 = 7 \text{ días}$$

Solución ejercicio 4.20

$$i = \left(1+\frac{0,12}{12}\right)^1\left(1+\frac{0,0370}{12}\right)^{11} - 1 \qquad i = 0,044789 \approx 4,479\,\%$$

5

Rentas financieras

5.1. Concepto de renta
5.2. Clasificación de las rentas
5.3. Valor capital o financiero de una renta
5.4. Renta constante, inmediata, pospagable y temporal
5.4.1. Valor actual
5.4.2. Valor final
5.5. Renta constante, inmediata, prepagable y temporal
5.5.1. Valor actual
5.5.2. Valor final
5.6. Rentas perpetuas
5.6.1. Valor actual
5.7. Rentas diferidas en p períodos de rédito constante
5.7.1. Valor actual
5.8. Rentas anticipadas en h períodos de rédito constante
5.9. Determinación de n e i en las rentas de rédito constante
5.9.1. Estudio del valor actual como función de n
5.9.2. Estudio del valor actual como función de i
Ejercicios propuestos
Resolución de los ejercicios propuestos

5.1. Concepto de renta

En el lenguaje corriente, *renta* es una sucesión de cobros o pagos periódicos, que tienen el carácter de rendimiento de un capital (como la rentabilidad o alquiler de un inmueble, las amortizaciones de un préstamo, las aportaciones a un plan de pensiones, etc.); en matemática financiera, el concepto es muy amplio y corresponde a un conjunto de prestaciones (monetarias) con vencimientos diversos. A cada una de las prestaciones se le llama *plazo* o *término* de la renta, y llamaremos *período* al espacio de tiempo (generalmente un año) que hay entre dos prestaciones consecutivas.

En cuanto al *origen* y *duración* de la renta, tienen un significado claro cuando la renta es contínua o periódica; *origen* es entonces la fecha de comienzo de las prestaciones y *duración* es el intervalo entre el principio y el final de las prestaciones.

En relación con el *objeto* de las rentas, éste está íntimamente ligado al de su valoración, se trata pues de encontrar un valor de la renta en un momento determinado del tiempo. De esta forma se puede determinar: el *valor final* en un momento cualquiera no anterior al vencimiento del último término, el *valor actual* en cualquier momento no posterior al vencimiento del primer término y eventualmente el *valor* en un momento intermedio entre el primer y último vencimiento.

El cálculo del valor final requiere fijar una ley de interés, habitualmente, al tratarse de operaciones a más de un año, ésta será la del interés compuesto; el cálculo del valor actual requiere utilizar una ley de descuento, normalmente aplicaremos la del descuento racional compuesto; por último el cálculo del valor en un momento intermedio requiere precisar ambas leyes y emplearemos la del interés y el descuento racional compuesto.

Además, deberán cumplir las siguientes condiciones: los términos de la renta han de ser iguales, y si son variables la variación ha de ser conocida; los períodos de vencimiento de los términos, han de ser equidistantes, es decir, han de tener el mismo vencimiento, anual, trimestral, mensual,...

5.2. Clasificación de las rentas

Dada la gran aplicación de las rentas a problemas económicos reales se hace preciso su estudio según la clasificación y terminología clásica. Por ello, clasificaremos las rentas en los siguientes grupos:

1. Cuando las variables que intervienen en la definición de la renta se suponen conocidas con certeza, se la denomina *renta cierta*, empleando el término *renta aleatoria* cuando alguna de las variables depende del resultado de un fenómeno aleatorio.

2. Otra clasificación es la que distingue las rentas según la amplitud de sus períodos de maduración.

   Cuando todos los períodos de renta, son de amplitud finita la renta se denomina *discreta* y se da el nombre de *renta continua* a aquellas en las que todos los períodos son infinitesimales.

   Las rentas discretas, también llamadas de *período uniforme*, reciben en particular los nombres de anual, semestral, mensual,... en correspondencia con la medida del período.

3. Atendiendo a la cuantía de los términos, las rentas discretas se clasifican en *constantes* y *variables*. Dentro de las constantes, se encuentran las *rentas unitarias*, que son aquellas en las que todos los términos tienen de cuantía la unidad.

4. Teniendo en cuenta el vencimiento de los términos, clasificaremos las rentas en:

   - *rentas prepagables*, cuando todos los vencimientos coincidan con el extremo inferior del correspondiente período y
   - *rentas pospagables* o rentas con vencimiento de los términos al final de su correspondiente período.

   En las rentas prepagables el origen de la renta coincide con el vencimiento del primer término, mientras que el final de la renta será posterior al último vencimiento y por el contrario, en las rentas pospagables, el origen es anterior al vencimiento del primer capital y, sin embargo, el final coincide con el vencimiento del último término.

   Un ejemplo de renta prepagable serían los alquileres, que en general se pagan por anticipado. Como ejemplo de pospagable, los sueldos, que suelen cobrarse a período vencido.

5. Según que la duración de la renta sea finita o infinita, ésta recibirá el calificativo de *renta temporal* o *renta perpetua* respectivamente.

6. La posición del punto α de valoración de la renta, respecto al origen o final de la misma, proporciona otro criterio de clasificación. Así para $\alpha < t_0$, se dice que la renta está *diferida* en $p = t_0 - \alpha$, para $\alpha > t_n$ que está *anticipada* en $h = \alpha - t_n$; y recibe el nombre de renta *inmediata* cuando α coincide con el origen o final de la renta.

7. Finalmente, según el tipo de sistema financiero con el que se valores, se puede hablar de: rentas valoradas en capitalización compuesta, rentas valoradas en capitalización simple,...

5.3. Valor capital o financiero de una renta

En términos generales, se entiende por valor capital de una renta en un determinado momento α al valor financiero de la distribución de capital que la define.

En particular resulta interesante la determinación del valor capital o financiero de las rentas en su origen t_0 y en su final t_n. Valores que reciben los nombres específicos de *valor inicial o actual* y *valor final* de la renta respectivamente.

Gráficamente el valor actual de una renta puede verse en la figura 5.1,

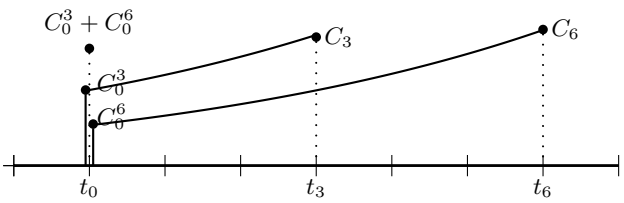


Figura 5.1: Valor actual de una renta financiera

Además, verifica las propiedades:

- respecto al punto de valoración, las rentas, pueden ser valoradas en cualquier punto.
- propiedad asociativa, por la que dos o más rentas pueden ser sustituidas por una única equivalente a las anteriores.
- propiedad disociativa, por la que una renta puede ser desdoblada y obtener varias rentas equivalentes a la original.

5.4. Renta constante, inmediata, pospagable y temporal

5.4.1. Valor actual

Estudiaremos inicialmente las rentas constantes inmediatas que clasificaremos según su vencimiento en pospagables y prepagables y dentro de estos en temporales y perpetuas. A este fin, éstas, son las más sencillas con valores financieros de fácil tabulación. Expresaremos las demás en función de las primeras.

Al valor actual de una renta constante temporal, inmediata, pospagable de término 1 (unitaria), lo designaremos por $a_{\overline{n}|i}$, en el que n expresa su duración en períodos y el subíndice i el tipo de interés periódico a que se evalúa.

En la figura 5.2 puede verse una representación gráfica,

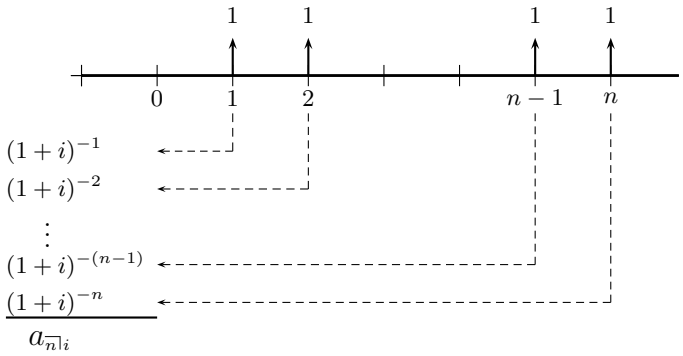


Figura 5.2: Valor actual de una renta unitaria

El valor actual de esta renta, lo calcularemos aplicando el principio general de equivalencia de capitales en el origen de la misma. Por tanto, recordando la expresión del valor actual de un capital C (véase 4.3 en la página 41),

$$C_0 = \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

expresión en la que el segundo término constituye la suma de términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{(1+i)}$, el último $\frac{1}{(1+i)^n}$ y la razón $\frac{1}{(1+i)}$.

Aplicando la expresión de la suma de los términos de una progresión geométrica (véase A.11 en la página 173),

$$S = \frac{a_n q - a_1}{q-1} \qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{\frac{1}{(1+i)^n}\,\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

multiplicando numerador y denominador por $(1+i)$,

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{5.1}$$

■

expresión que nos da el valor actual de la renta unitaria. Generalizando, el valor actual de una renta constante, temporal, inmediata y pospagable de término C, duración n períodos a interés i, y de acuerdo con (5.1), será:

$$V_0 = C\, a_{\overline{n}|i} \qquad V_0 = C\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{5.2}$$

■

5.4.2. Valor final

El valor final de una renta constante, temporal, inmediata, pospagable de término 1 (unitaria) lo designaremos por $s_{\overline{n}|i}$, en el que n e i corresponden a la duración y tipo de interés respectivamente.

Del mismo modo que hemos hecho para el valor actual, la obtención gráfica del valor final, sería tal como se muestra en la figura 5.3.

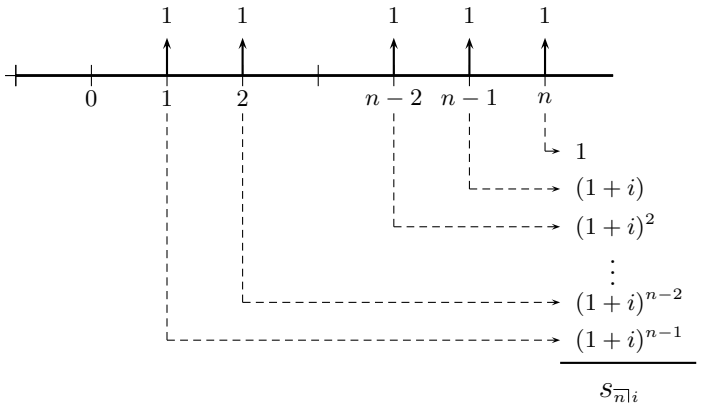


Figura 5.3: Valor final de una renta unitaria

Igual que para la obtención del valor actual, el valor final, sería:

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^s$$

Nuevamente se trata de una suma de términos variables en progresión geométrica, esta vez creciente, de razón $(1+i)$ cuya expresión (véase A.11 en la página 173), es $S = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1}$, y por tanto, resulta:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{5.3}$$

■

Relación entre el valor actual y el valor final

Obsérvese que se verifica que capitalizando n períodos el valor actual encontramos el valor final de la renta:

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n \tag{5.4}$$

por ser $(1+i)^n$ el factor de capitalización en el intervalo $[0, n]$.

Cuando en lugar de una renta de cuantía unitaria se trate de una renta con términos de cuantía constante C, el valor final será:

$$V_n = C\,s_{\overline{n}|i} \qquad V_n = C\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad V_n = C\,a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n \tag{5.5}$$

■

De la misma forma, podríamos obtener el valor actual, aplicando el descuento racional compuesto al valor final.

Ejemplo 5.1 Calcular el valor inicial y final de una renta pospagable, de 8 años de duración y término anual constante de 5 000 €, si se valora a rédito anual constante del 7 %. Comprobar también que el valor final puede obtenerse capitalizando el valor inicial.

$$\begin{aligned} V_0 = (V_0)_{\overline{8}|0,07} &= C\,a_{\overline{8}|0,07} = 5\,000\,a_{\overline{8}|0,07} \\ &= 5\,000\,\frac{1-(1+0,07)^{-8}}{0,07} = 5\,000 \cdot 5,9712986 = 29\,856,49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_8 = (V_n)_{\overline{8}|0,07} &= C\,s_{\overline{8}|0,07} = 5\,000\,s_{\overline{8}|0,07} \\ &= 5\,000\,\frac{(1+0,07)^8-1}{0,07} = 5\,000 \cdot 10,259803 = 51\,299,01 \end{aligned}$$

También se podría haber obtenido V_8 capitalizando V_0. En efecto,

$$V_8 = V_0(1+i)^8 = 29\,856,49\,(1+0,07)^8 = 29\,856,49 \cdot 1,718186 = 51\,299,01$$

La obtención de los valores de $a_{\overline{8}|0,07}$ y de $s_{\overline{8}|0,07}$ puede obtenerse directamente utilizando tablas financieras (véase B.3 en la página 184), con una calculadora resolviendo las expresiones y por supuesto utilizando una calculadora financiera con la que pueden obtenerse de forma directa.

Utilizando la calculadora financiera, para obtener V_0,

5000 [CHS] [PMT] 8 [n] 7 [i] [PV] obteniendo la respuesta de 29 856, 49

Y para V_n,

0 [PV] [FV] en la que se obtiene 51 299, 01

5.5. Renta constante, inmediata, prepagable y temporal

5.5.1. Valor actual

De la misma forma que hicimos en el caso de una renta pospagable, analizaremos en primer lugar la renta prepagable constante de cuantías unitarias, es decir, de término 1, asociado a los períodos $0, 1, 2, \cdots, n$.

Su valor inicial, o en 0, simbolizado por $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ es:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)} = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{-s}$$

y sumando los términos de la progresión puede también escribirse:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i) \tag{5.6}$$

■

Gráficamente podemos verlo en la figura 5.4.

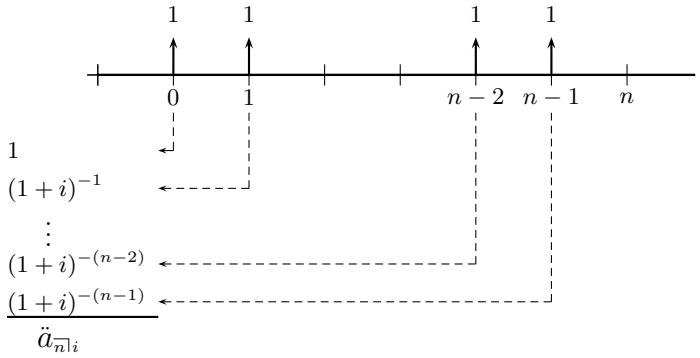


Figura 5.4: Valor actual de una renta unitaria prepagable

5.5.2. Valor final

El valor final o en n, representado por $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, es:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^s$$

y sumando los términos de la progresión puede también escribirse:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\,(1+i) \tag{5.7}$$

■

Relación entre el valor actual y el valor final

Se verifica la relación, como ocurría en la renta pospagable:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n$$

Puede igualmente observarse, viendo el valor inicial y el valor final de esta renta con sus análogos en el caso de renta pospagable, que mantienen la siguiente relación:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\,(1+i) \tag{5.8}$$
$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}\,(1+i)$$

consecuencia de ser constante el rédito periodal, lo que implica la equivalencia de las rentas prepagable unitaria, con la pospagable de cuantía constante $(1+i)$ es la que se muestra en la figura 5.5.

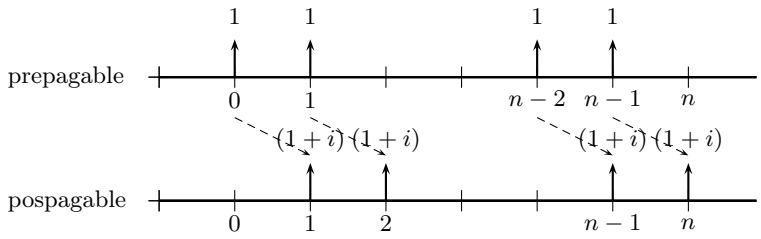


Figura 5.5: Relación entre una renta unitaria prepagable y pospagable

Esta relación entre prepagables y pospagables se verificará siempre que el rédito de valoración sea constante para todos los períodos, con independencia de las cuantías de los términos de la renta, ya que trasladar el vencimiento de los términos del extremo inicial de cada período al extremo final equivale a multiplicar las cuantías por $(1+i)$, factor de capitalización del período.

Al ser $i > 0$, se verificará siempre $\ddot{a}_{\overline{n}|i} > a_{\overline{n}|i}$ y $\ddot{s}_{\overline{n}|i} > s_{\overline{n}|i}$

También se obtienen de forma inmediata estas nuevas relaciones entre rentas unitarias prepagables y pospagables:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

Estas expresiones son propias de las rentas de cuantía constante, lo que permite escribir:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{-s} = 1 + \sum_{s=1}^{n-1}(1+i)^{-s} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{s} = 1 + \sum_{s=1}^{n-1}(1+i)^{s} = 1 + \ddot{s}_{\overline{n-1}|i}$$

y facilita los cálculos con el empleo de tablas, caluladora financiera u hoja de cálculo.

Ejemplo 5.2 Calcular el valor inicial y final de una renta de período anual, prepagable de 6 términos y cuantía constante 4 000 € valorada en capitalización compuesta de parámetro $i = 9\,\%$ anual.

Su valor inicial puede obtenerse con:

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{6}|0,09} = 4000\,\ddot{a}_{\overline{6}|0,09} = 4000\,(1+i)a_{\overline{6}|0,09} = 4000{\cdot}1,09{\cdot}4,4859185 = 19558,61$$

El valor final, puede obtenerse en función del valor inicial:

$$\ddot{V}_n = (\ddot{V}_0)_{\overline{6}|0,09}\,(1+0,09)^6 = 19\,558,61 \cdot 1,6771001 = 32\,801,74$$

Utilizando la calculadora financiera, $\ddot{V}_0$:

[g] [BEG] 6 [n] 9 [i] 4000 [CHS] [PMT] [PV] obteniendo 19 558, 61

El valor de $\ddot{V}_n$, partiendo de los datos anteriores:

0 [PV] [FV] presentado el resultado de 32 801, 74

5.6. Rentas perpetuas

5.6.1. Valor actual

En primer lugar analizaremos el supuesto de renta perpetua pospagable y unitaria. El esquema se corresponde con el del valor actual de una renta pospagable unitaria en el que el tiempo es perpetuo.

Su valor actual o inicial, valorado a rédito constante i, lo representamos por $a_{\overline{\infty}|i}$ y vendrá dado por la suma de una serie geométrica, que es convergente por ser $(1+i)^{-1} < 1$:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \sum_{s=1}^{\infty}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} \tag{5.9}$$

■

Este valor $a_{\overline{\infty}|i}$, se puede interpretar como la cuantía, tal que sus intereses periodales son la unidad ya que:

$$a_{\overline{\infty}|i}\; i = 1$$

En el caso de que la renta perpetua unitaria sea prepagable, su valor actual, será:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} &= \sum_{s=0}^{\infty}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=0}^{n}(1+i)^{-s} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i) = 1+\frac{1}{i}\end{aligned} \tag{5.10}$$

Entre $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$ y $a_{\overline{\infty}|i}$ se verifican, por tanto, las mismas relaciones que entre los valores actuales de las rentas temporales prepagable y pospagable, es decir:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i}\,(1+i) \qquad\qquad \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} + 1$$

No tiene sentido hablar de valor final de rentas perpetuas, pues las series que los representan son divergentes. Recuérdese que una renta es convergente cuando la razón de la progresión es $q < 1$. En el valor final, $q > 1$ ya que $(1+i) > 1$ y por tanto, es divergente.

El valor actual de una renta perpetua de términos de cuantía constante C, será:

En el supuesto de una renta pospagable:

$$V_0 = (V_0)_{\overline{\infty}|i} = C\,a_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{i}$$

y en el de prepagable:

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|i} = C\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = C\left(1+\frac{1}{i}\right)$$

Ejemplo 5.3 Obtener el valor actual de una renta perpetua con términos anuales de cuantía constante $C = 4\,500$ valorada a un tipo de interés del 6 %, tanto en el caso de que fuera pospagable como prepagable.

En la opción de términos pospagables,

$$V_0 = (V_0)_{\overline{\infty}|0,06} = C\, a_{\overline{\infty}|0,06} = 4\,500\,\frac{1}{0,06} = 75\,000$$

Si se trata de prepagable,

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|0,06} = C\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|0,06} = 4\,500\,\frac{1+0,06}{0,06} = 79\,500$$

5.7. Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Las rentas se dicen diferidas cuando el momento de valoración α es anterior al origen de la renta.

Si suponemos que el diferimiento coincide con un número entero p de períodos de rédito constante i, para cada uno de los diversos tipos de rentas unitarias tratadas anteriormente, se obtienen los siguientes resultados:

5.7.1. Valor actual

El valor actual, representado por ${}_p/a_{\overline{n}|i}$ es el que se calcula en el momento 0, comenzándose a recibir o entregar a partir del momento $p+1$.

En la figura 5.6 podemos ver un esquema representativo.

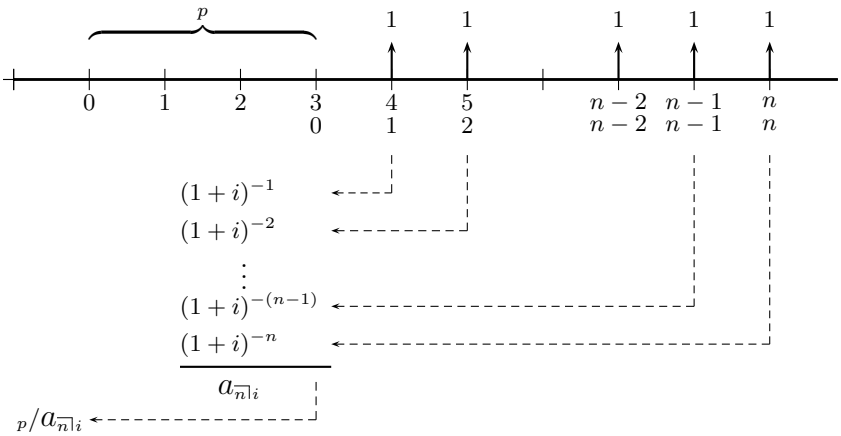


Figura 5.6: Valor actual de una renta unitaria diferida

Y podemos expresarlo como:

$${}_p/a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-(p+s)} = (1+i)^{-p}\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = (1+i)^{-p}a_{\overline{n}|i} \qquad (5.11)$$

■

A efectos operativos es interesante expresar la renta diferida como la diferencia de dos rentas inmediatas:

$${}_p/a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-(p+s)} = \sum_{s=1}^{n+p}(1+i)^{-s} - \sum_{s=1}^{p}(1+i)^{-s}$$

de la que se obtiene:

$$ {}_p/a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+p}|i} - a_{\overline{p}|i} $$

Si se trata del valor actual prepagable, su valor actual, será:

$$ {}_p/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{-(p+s)} = (1+i)^{-p}\sum_{s=0)}^{n-1}(1+i)^{-s} = (1+i)^{-p}\ddot{a}_{\overline{n}|i} \qquad (5.12) $$

■

que también podemos expresar como:

$$ {}_p/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{p+n}|i} - \ddot{a}_{\overline{p}|i} $$

En el supuesto de que la renta sea perpetua en lugar de temporal, el valor actual, se obtendría:

$$ {}_p/a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} {}_p/a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}(1+i)^{-p}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\,\frac{1}{i} \qquad (5.13) $$

■

que también podrá obtenerse como:

$$ {}_p/a_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} - a_{\overline{p}|i} $$

Si la renta diferida es prepagable y perpetua:

$$ {}_p/\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} {}_p/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p+1}\,\frac{1}{i} $$

y también,

$$ {}_p/\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} - \ddot{a}_{\overline{p}|i} $$

Si las rentas no son unitarias, sino de cuantía C,

$$ {}_p/(V_0)_{\overline{n}|i} = C\,{}_p/a_{\overline{n}|i} \text{ y si es perpetua } {}_p/(V_0)_{\overline{\infty}|i} = C\,{}_p/a_{\overline{\infty}|i} $$

si es prepagable,

$$ {}_p/(\ddot{V}_0)_{\overline{n}|i} = C\,{}_p/\ddot{a}_{\overline{n}|i} \text{ y si es perpetua } {}_p/(\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|i} = C\,{}_p/\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} $$

Al valor final de una renta diferida en p períodos no le afecta el diferimiento ya que,

$$ {}_p/s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n+p}\,{}_p/a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n+p}(1+i)^{-p}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n}a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} $$

Ejemplo 5.4 Calcular el valor actual de una renta prepagable de cuantía anual constante de 2 000 € diferida 3 años y de 4 de duración, si la valoración se hace a un tipo de interés del 6 %

$$ {}_3/(\ddot{V}_0)_{\overline{4}|0{,}06} = 2\,000 \cdot 3{,}673012 \cdot 0{,}839619 = 6\,167{,}86 $$

o como diferencia de rentas siendo,

$$ {}_3/\ddot{a}_{\overline{4}|0{,}06} = \ddot{a}_{\overline{7}|0{,}06} - \ddot{a}_{\overline{3}|0{,}06} = 3{,}083932 $$

$$ {}_3/(\ddot{V}_0)_{\overline{4}|0{,}06} = 2\,000 \cdot 3{,}083932 = 6\,167{,}86 $$

Utilizando la calculadora financiera, $\ddot{V}_0$:

[g] [BEG] 4 [n] 6 [i] 2000 [CHS] [PMT] [PV] obteniendo 7 346, 02

Y para obtener ${}_3/(\ddot{V}_0)$,

[STO] [FV] 0 [PMT] 3 [n] [PV] que da como resultado 6 167, 86

5.8. Rentas anticipadas en h períodos de rédito constante

En este caso, se trata de rentas valoradas en un momento α que se encuentra h períodos posterior al final de la renta.

Si se trata de una renta anticipada y pospagable, el valor de la renta en $\alpha = t_{n+h}$, representado por ${}_h/s_{\overline{n}|i}$ viene dado por la expresión:

$$ {}_h/s_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{h+s} = (1+i)^h \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^s = (1+i)^h s_{\overline{n}|i} \tag{5.14} $$

■

Si se trata de una renta prepagable y anticipada, y que tiene como valor en $\alpha = t_{n+h}$:

$$ {}_h/\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{h+s} = (1+i)^h \sum_{s=1}^{n}(1+i)^s = (1+i)^h \ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{h+1} s_{\overline{n}|i} \tag{5.15} $$

■

Ejemplo 5.5 Determinar el valor al final de nueve años de una renta pagadera por años vencidos, de cuantía anual constante de 30 000 € de siete términos, sabiendo que el rédito anual es del 6 %

$$ {}_2/(V_n)_{\overline{7}|0,06} = 30\,000\,(1+0,06)^2 s_{\overline{7}|0,06} = 282\,939,48 $$

Utilizando la calculadora financiera, V_n:

7 [n] 6 [i] 30000 [CHS] [PMT] [FV] obteniendo 251 815, 13

Y para obtener ${}_2/(V_n)$,

[CHS] [STO] [PV] 0 [PMT] 2 [n] [FV] que da como resultado 282 939, 48

5.9. Determinación de n e i en las rentas de rédito constante

La utilización generalizada de las rentas unitarias hace conveniente su estudio analítico de los valores financieros principalmente inicial y final como función de sus variables básicas n e i.

5.9.1. Estudio del valor actual como función de n

La variable n se refiere al número de términos de la renta y por tanto, pertenece a los números naturales, $n \in \mathbb{N}$.

La función de n, que representa $a_{\overline{n}|i}$, es:

$$ \varphi_1(n) = a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} $$

Esta función es creciente cuanto mayor sea el número de términos. Para $n = 0$ toma el valor $\varphi_1(0) = 0$, y está acotada por:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1(n) = a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

Si ampliamos la función al campo real positivo haciendo $n = x$ y $x \in \mathbb{R}$, viendo la primera y segunda derivada podríamos decir que la función es creciente y cóncava tal como se muestra en el gráfico 5.7.

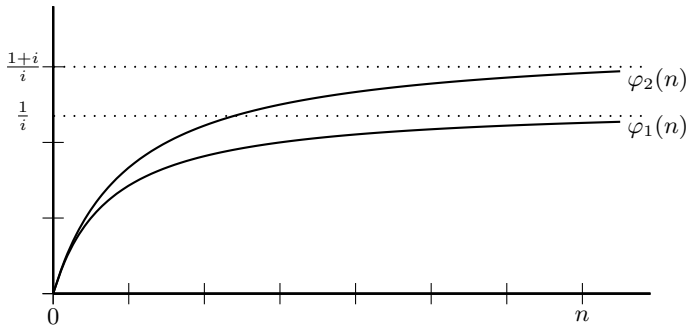


Figura 5.7: Estudio de n

La determinación del valor de n, se haría a través de las tablas financieras, interpolando en su caso (véase A.4 en la página 169), por tanteos o tomando logaritmos. La utilización de una calculadora financiera u hoja de cálculo, facilitan la labor.

Ejemplo 5.6 Determinar el número de años de una renta cuyo valor actual es de 45 032 €, sus términos pospagables de 4 000 € y el tipo de interés del 8 %

$$45\,032 = 4\,000\, a_{\overline{n}|0,08} \qquad \frac{45\,032}{4\,000} = \frac{1-(1+0,08)^{-n}}{0,08}$$

$$0,900640 = 1 - \frac{1}{1,08^n} \qquad \frac{1}{1,08^n} = 1 - 0,900640$$

$$1,08^n = \frac{1}{0,099360} \qquad n \log 1,08 = \log 10,064412 \qquad n = 30$$

Con la calculadora financiera, para calcular n,

45032 [PV] 4000 [CHS] [PMT] 8 [i] [n] obteniendo 30

5.9.2. Estudio del valor actual como función de i

El valor actual de una renta unitaria pospagable, es:

$$\varphi_1(i) = a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Obteniendo la primera y segunda derivada,

$$\varphi_1'(i) = \sum_{s=1}^{n}(-s)(1+i)^{-(s+1)} < 0 \to \varphi_1(i) \text{ decreciente}$$

$$\varphi_1''(i) = \sum_{s=1}^{n} s(s+1)(1+i)^{-(s+2)} > 0 \to \varphi_1(i) \text{ convexa}$$

los valores de $\varphi_1(i)$ en los extremos, son:

$$\varphi_1(0) = n \qquad \text{y} \qquad \lim_{i\to x} \varphi_1(i) = 0$$

Resumiendo, $\varphi_1(i)$ es decreciente y convexa, corta al eje de ordenadas y en el punto $(0, n)$ y tiene como asíntota el eje positivo de x (abcisas).

Si se trata de una renta prepagable, operando de la misma forma, veríamos que se trata igualmente de una función decreciente y convexa en la que la asíntota, sería:

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_2(i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{-s} = 1$$

Y su representación gráfica tal como se muestra en la figura 5.8.

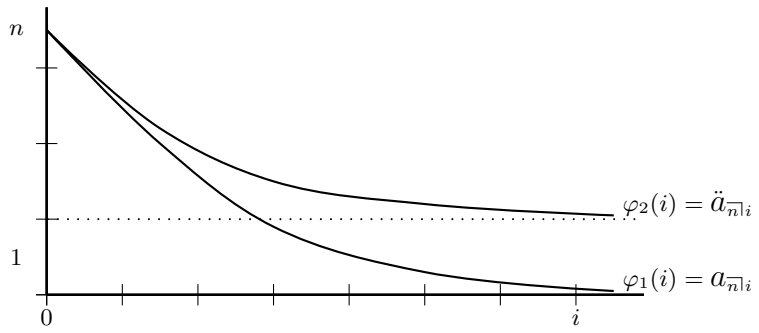


Figura 5.8: Estudio de i

La obtención del valor de i, se haría utilizando un método de tanteo, o mediante el empleo de las tablas financieras e interpolando (véase A.4 en la página 169) en su caso. Igualmente, el empleo de una calculadora financiera u hoja de cálculo facilitará la tarea.

Ejemplo 5.7 Al adquirir un vehículo por 24 000 € nos proponen pagar durante 6 años una renta de 5 390 € anuales. ¿A qué tipo de interés se ha realizado la operación?

$$24\,000 = 5\,390\, a_{\overline{6}|i}$$

$$a_{\overline{6}|i} = \frac{24\,000}{5\,390} = 4,452690$$

Buscando los valores en las tablas, obtenemos:

$$a_{\overline{6}|0,09} = 4,485919 \qquad a_{\overline{6}|0,10} = 4,355261$$

e interpolando,

$$\frac{4,452690 - 4,485919}{4,355261 - 4,485919} = \frac{x - 0,09}{0,1 - 0,09}$$

$$\frac{0,033229}{0,130658} = \frac{x - 0,09}{0,01}$$

$$x = 0,092543 = 9,25\,\%$$

Con la calculadora, el cálculo de i,

6 [n] 24000 [PV] 5390 [CHS] [PMT] [i] obteniendo $9,25\,\%$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1 Qué cantidad depositaremos en un banco que opera al 7 % de interés compuesto anual, para percibir al final de cada año y durante 10 años una renta de 10 000 €.

Solución: $V_0 = 70\,235,82$

Ejercicio 5.2 Calcular la anualidad necesaria para amortizar en 10 años una deuda que en el momento actual asciende a 100 000 €, si la operación ha sido estipulada al 6 % de interés compuesto anual, y los pagos se realizan al final de cada año.

Solución: $C = 13\,586,80$

Ejercicio 5.3 Para adquirir un piso el señor A ofrece 500 000 € al contado, el señor B 100 000 € en el acto de la firma de contrato y 40 000 € anuales durante 20 años y el señor C, 40 000 € anuales durante 30 años verificando el primer pago al concertar el contrato. Supuesto un tipo de interés del 6 %, ¿qué oferta es la más conveniente para el vendedor?

Solución: C

Ejercicio 5.4 Mediante la entrega de 5 000 € al término de cada año y durante 12, queremos constituir un capital que nos permita percibir durante los 20 años siguientes una renta. Calcular el término de la misma, si la operación se realiza al tanto de evaluación del 7 %.

Solución: $C = 8\,442,72$

Ejercicio 5.5 Se compra una casa en 400 000 € destinada a alquiler y a la que se concede una vida útil de 20 años. Pero sobre la finca se grava un censo de 780 € anuales. ¿Cuál debe ser el precio del alquiler anual para que el capital invertido en su adquisición rinda un 5 %?

Solución: $C = 31\,311,46$

Ejercicio 5.6 Se imponen 5 000 € al principio de cada año en una entidad bancaria que abona un 7 % anual compuesto. Después de realizadas 15 imposiciones y al año de la última imposición comienzan a retirarse 5 000 € durante 15 años. ¿Cuál será el saldo en el momento de retirar la última anualidad?

Solución: $\text{Saldo} = 245\,279,83$

Ejercicio 5.7 El valor actual de una renta de 10 000 € anuales pospagables es de 98 181,47 €. Si hubiese sido prepagable, el valor actual sería de 106 081,47 €. Calcular el tanto y el tiempo.

Solución: $i = 0,08 \qquad n = 20$

Ejercicio 5.8 Se imponen durante n años anualidades vencidas de 15 000 € al 5 %, al objeto de recibir durante los $2n$ años siguientes, y también por años vencidos, una renta anual de 10 000 €. Determinar el valor de n.

Solución: $n = 4$

Ejercicio 5.9 Una persona ha dedicado anualmente 15 000 € a la amortización de una deuda de 125 000 € que contrajo hace 10 años, siendo el tipo de interés del 10 %. Habiendo decidido hoy liquidar el resto de su deuda, ¿cuál será la cantidad que deberá abonar ahora, además de la anualidad?

Solución: $\text{Saldo} = 85\,156,44$

Ejercicio 5.10 Determinar el valor final de una renta de 10 000 € anuales que se van ingresando en una institución financiera durante 8 años, sabiendo que dicha institución utiliza un tanto de valoración del 3,5 % durante los tres primeros años y un 4 % durante los siguientes.

Solución: $V_n = 91\,955,20$

Ejercicio 5.11 Un club deportivo compra terrenos adicionales por un valor de 230 000 € pagando 80 000 € al contado y comprometiéndose a pagar el resto en seis pagos anuales iguales. ¿Cuál deberá ser el importe anual de cada pago si el tipo de interés pactado es el 10 % anual?

Solución: $C = 34\,441,11$

Ejercicio 5.12 ¿Cuál es el valor de una casa por la que se piden 50 000 € al contado, más veinte anualidades de 30 000 € cada una si se estiman los intereses al 6 %?

Solución: $V_0 = 394\,097,64$

Ejercicio 5.13 El valor actual de una renta perpetua prepagable de 6 000 € es de 106 000 €. ¿Cuál es el tanto de interés de valoración?

Solución: $i = 0,06$

Ejercicio 5.14 Mediante la entrega de 35 000 € al término de cada año y durante 11 se pretende constituir un capital que permita percibir durante los 20 años siguientes una renta constante. Calcular el término de la misma si la operación se evalúa al tanto anual del 6 %

Solución: $C = 45\,685,36$

Ejercicio 5.15 Al objeto de que su hijo, de catorce años de edad, reciba al alcanzar los veintitres la suma de 100 000 €, el señor X desea saber la cuantía que debe entregar al final de cada año en una entidad bancaria que computa intereses al 3,5 % para este tipo de depósitos. Después del quinto año, el banco eleva el interés al 4 %. Se pide:

1. Anualidad inicial que debe entregar el señor X,
2. Nueva anualidad después de la subida del tanto para obtener la misma suma de 100 000 €,
3. Cuantía que podría retirar el hijo si se continuasen depositando los mismos importes.

Solución: 1. $C = 9\,644,60$ 2. $C = 9\,300,98$ 3. $V_n = 101\,459,16$

Ejercicio 5.16 Hallar el valor actual de una renta pospagable de 10 pagos, anualidad de 10 000 € y tanto de valoración del 5 % sabiendo que comenzaremos a devengarla dentro de 5 años.

Solución: $V_0 = 60\,501,81$

Ejercicio 5.17 Durante 5 años y al final de cada uno, se ingresan 7 000 € en un banco que opera al 4 % anual. ¿Qué capital se habrá constituido al final del noveno año?

Solución: $V_n = 44\,354,32$

Ejercicio 5.18 Compramos una maquinaria por 20 000 €, a pagar en 15 anualidades, realizándose el primer pago a los 3 años. Determinar la anualidad si el tanto de valoración es del 6 %.

Solución: $C = 2\,452,61$

Ejercicio 5.19 Una entidad financiera presta a una empresa 300 000 €, y ésta se compromete a reintegrarlos junto con sus intereses mediante 12 anualidades iguales que hará efectivas al final de cada año. Si la capitalización es compuesta y los tantos que aplica la entidad financiera son: 6 % para los 4 primeros años, 7 % para los 5 siguientes, y el 8 % para los tres últimos, determinar el valor de la anualidad.

Solución: $C = 36\,727,50$

Ejercicio 5.20 Una persona compra un piso entregando 40 000 € a la firma del contrato y 10 000 € al final de cada uno de los próximos 15 años. Si la entidad hipotecaria le aplica un tanto del 4 % durante los primeros 7 años y un 5 % durante el resto de la operación, se pide determinar el valor del piso.

Solución: $V_0 = 149\,135,65$

Ejercicio 5.21 Una renta de cuantía anual constante de 3 500 €, diferida en cinco años se valora a rédito constante del 5 %. Se desea saber su valor actual en los supuestos de considerarla pospagable y con una duración de 10 años o en el de que sea prepagable y perpetua.

Solución: $V_0 = 21\,175,63 \qquad \ddot{V}_0 = 57\,589,17$

Ejercicio 5.22 Determinar el valor en estos momentos, de una renta cuya cuantía anual constante es de 1 500 € si el tipo de interés es del 5 % anual y comenzó a devengarse hace 12 años en el supuesto de que sea pospagable y de 10 términos.

Solución: $V_n = 20\,800,69$

Ejercicio 5.23 Se quiere cancelar una deuda de 14 752 € mediante el abono de una renta al final de cada año de 3 000 € si el tanto de valoración es del 6 %, ¿cuál será el número de pagos a realizar?

Solución: $u = 6$

Ejercicio 5.24 Sabiendo que el valor actual de una renta pospagable de 6 términos de 2 500 € cada uno es de 11 916 € determinar el tipo de interés a que ha sido evaluada.

Solución: $i = 0,07$

Ejercicio 5.25 Recibimos de una entidad financiera una cantidad de 50 000 € a devolver juntamente con sus intereses, mediante diez entregas iguales al final de cada año. La entidad nos exige un tipo de interés que va en aumento y que es del 5 % para los tres primeros años, el 6 % para los tres siguientes y el 7 % para los cuatro últimos. ¿Cuál será el valor de la anualidad constante?

Solución: $C = 6\,676,44$

Ejercicio 5.26 Calcular la cuantía anual necesaria para al final de 8 años disponer, en un banco que opera al 6 % de interés anual de un capital de 15 000 €

Solución: $C = 1\,515,54$

Ejercicio 5.27 Un piso, puede ser comprado haciendo uso de una de las tres siguientes opciones:

1. Pago al contado de 300 000 €
2. Abono de 375 000 € dentro de 5 años.
3. Un pago anual de 32 000 € durante 15 años siendo el primer pago en el momento de la firma del contrato.

Para la valoración consideramos el tipo de interés vigente en el momento del 6 %. Determinar la opción más favorable para el comprador.

Solución: 2.

Ejercicio 5.28 Para el pago de una compra de 4 500 € nos ofrecen pagar durante 10 años 575,75 €. Determinar el tipo de interés al que se ha realizado la operación.

Solución: $i = 0,0475$

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 5.1

$$V_0 = C\,a_{\overline{n}|i} \qquad V_0 = 10\,000\,a_{\overline{10}|0,07}$$
$$V_0 = 10\,000\frac{1-(1+0,07)^{-10}}{0,07} \qquad V_0 = 70\,235,82$$

Solución ejercicio 5.2

$$V_0 = C\,a_{\overline{n}|i} \qquad 100\,000 = C\,a_{\overline{10}|0,06}$$
$$C = \frac{100\,000}{\frac{1-(1+0,06)^{-10}}{0,06}} \qquad C = 13\,586,80$$

Solución ejercicio 5.3

$V_0 = C\,a_{\overline{n}|i}$

En el primer caso, el valor está en el origen $\quad A = 500\,000,00$

$$B = 100\,000 + 40\,000\,\frac{1-(1+0,06)^{-20}}{0,06} \qquad B = 558\,796,85$$
$$C = 40\,000\frac{1-(1+0,06)^{-30}}{0,06}(1+0,06) \qquad C = 583\,628,84$$

Solución ejercicio 5.4

$$5\,000\,s_{\overline{12}|0,07} = C\,a_{\overline{20}|0,07} \qquad 5\,000\,\frac{(1+0,07)^{12}-1}{0,07} = C\frac{1-(1+0,07)^{-20}}{0,07}$$
$$89\,442,26 = 10,594014\,C \qquad C = \frac{89\,442,26}{10,594014} \qquad C = 8\,442,72$$

Solución ejercicio 5.5

$$400\,000 = C\,\ddot{a}_{\overline{20}|0,05} - 780\,a_{\overline{20}|0,05} \qquad 400\,000 = 13,085321\,C - 9\,720,52$$
$$C = \frac{409\,720,52}{13,085321} \qquad C = 31\,311,46$$

Solución ejercicio 5.6

$$S = 5\,000\,\ddot{s}_{\overline{15}|0,07}(1+0,07)^{15} = 5\,000\,s_{\overline{15}|0,07}$$
$$S = 370\,924,94 - 125\,645,11 \qquad S = 245\,279,83$$

Solución ejercicio 5.7

$$\left.\begin{array}{c} 98\,181,47 = 10\,000\,a_{\overline{n}|i} \\ 106\,081,47 = 10\,000\,a_{\overline{n}|i}\,(1+i) \end{array}\right\}$$

1. Para calcular i,

$$106\,081,47 = 98\,181,47\,(1+i) \qquad 106\,081,37 = 98\,181,47 + 98\,181,47\,i$$
$$i = \frac{106\,081,47 - 98\,181,47}{98\,181,47} \qquad i = 0,08$$

2. Para obtener el valor de n,

$$98\,181,47 = 10\,000\,a_{\overline{n}|0,08} \qquad a_{\overline{n}|0,08} = \frac{98\,181,47}{10\,000} = 9,8181$$

Utilizando las tablas financieras, $n = 20$

Solución ejercicio 5.8

$$15\,000\, s_{\overline{n}|0,05} = 10\,000\, a_{\overline{2n}|0,05}$$

$$15\,000\,\frac{(1+0,05)^n - 1}{0,05} = 10\,000\,\frac{1-(1+0,05)^{-2n}}{0,05}$$

si $x = 1,05^n$

$$15\,000\,\frac{x-1}{0,05} = 10\,000\frac{1-x^2}{0,05} \text{ y reduciendo,}$$

$$3\,(x-1) = 2\,(1-x^{-2})\frac{x^2}{x^2} \qquad 3\,(x-1) = \frac{2\,(x^2-1)}{x^2}$$

$$3\,(x-1) = \frac{2\,(x+1)(x-1)}{x^2} \qquad 3x^2 = 2(x+1)$$

$$3x^2 - 2x - 2 = 0 \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{6} = 1,215204$$

$$1,05^n = 1,215204 \qquad n = \frac{\log 1,215204}{\log 1,05} \qquad n = 4$$

Solución ejercicio 5.9

$$S = 125\,000\,(1+0,1)^{10} - 15\,000 s_{\overline{10}|0,1}$$

$$S = 324\,217,81 - 239\,061,37 \qquad S = 85\,156,44$$

Solución ejercicio 5.10

$$V_n = 10\,000\, s_{\overline{3}|0,035}(1+0,04)^5 + 10\,000\, s_{\overline{5}|0,04} \qquad V_n = 91\,955,20$$

Solución ejercicio 5.11

$$230\,000 - 80\,000 = C\, a_{\overline{6}|0,1} \qquad C = 34\,441,11$$

Solución ejercicio 5.12

$$V_0 - 50\,000 = 30\,000\, a_{\overline{20}|0,06} \qquad V_0 = 394\,097,64$$

Solución ejercicio 5.13

$$106\,000 = 6\,000\left(1 + \frac{1}{i}\right) \qquad 106\,000 = 6\,000\,\frac{6\,000}{i}$$

$$100\,000\, i = 6\,000 \qquad i = \frac{6\,000}{100\,000} \qquad i = 0,06$$

Solución ejercicio 5.14

$$35\,000 s_{\overline{11}|0,06} = C\, a_{\overline{20}|0,06}$$

$$524\,007,49 = C\, a_{\overline{20}|0,06} \qquad C = 45\,685,36$$

Solución ejercicio 5.15

1. La anualidad inicial,

$$C\, s_{\overline{9}|0,035} = 100\,000 \qquad C = 9\,644,60$$

2. Nueva anualidad tras el aumento de i,

$$9\,644,60\, s_{\overline{5}|0,035}(1+0,04)^4 + C\, s_{\overline{4}|0,04} = 100\,000$$

$$60\,503,73 + 4,246464\, C = 100\,000 \qquad C = 9\,300,98$$

3. Cuantía al final,

$$9\,644,60\, s_{\overline{5}|0,035}(1+0,04)^4 + 9\,644,60\, s_{\overline{4}|0,04} = 101\,459,18$$

Solución ejercicio 5.16

$$V_0 = 10\,000\, a_{\overline{10}|0,05}(1+0,05)^{-5} \qquad V_0 = 60\,501,81$$

Solución ejercicio 5.17

$$V_n = 7\,000\, s_{\overline{5}|0\,,04}(1+0,04)^4 \qquad V_n = 44\,354,32$$

Solución ejercicio 5.18

$$20\,000 = C\, a_{\overline{15}|0\,,06}(1+0,06)^{-3} \qquad C = 2\,452,61$$

Solución ejercicio 5.19

$$300\,000 = C\,\left[a_{\overline{4}|0\,,06} + a_{\overline{5}|0\,,07}(1+0,06)^{-4} + a_{\overline{3}|0\,,08}(1+0,07)^{-5}(1+0,06)^{-4}\right]$$
$$C = 36\,727,50$$

Solución ejercicio 5.20

$$V_0 = 40\,000 + 10\,000\, a_{\overline{7}|0\,,04} + 10\,000\, a_{\overline{8}|0\,,05}(1+0,04)^{-7}$$
$$V_0 = 149\,135,65$$

Solución ejercicio 5.21

$$V_0 = 3\,500\, a_{\overline{10}|0\,,05}(1+0,05)^{-5} \qquad V_0 = 21\,175,63$$
$$\ddot{V}_0 = 3\,500\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|0\,,05} \qquad 3\,500\,\frac{1+0,05}{0,05}\,(1+0,05)^{-5} \qquad \ddot{V}_0 = 57\,589,17$$

Solución ejercicio 5.22

$$V_n = 1\,500\, s_{\overline{10}|0\,,05}(1+0,05)^2 \qquad V_n = 20\,800,19$$

Solución ejercicio 5.23

$$14\,752 = 3\,000\, a_{\overline{n}|0\,,06} \qquad n = 6$$

Solución ejercicio 5.24

$$11\,916 = 2\,500\, a_{\overline{6}|i} \qquad i = 0,07$$

Solución ejercicio 5.25

$$50\,000 = C\,\left[a_{\overline{3}|0\,,05} + a_{\overline{3}|0\,,06}(1+0,05)^{-3} + a_{\overline{4}|0\,,07}(1+0,06)^{-3}(1+0,05)^{-3}\right]$$
$$C = 6\,676,44$$

Solución ejercicio 5.26

$$15\,000 = C\, s_{\overline{8}|0\,,06} \qquad C = 1\,515,54$$

Solución ejercicio 5.27

1. Al contado, $V_0 = 300\,000$
2. Aplicamos la capitalización compuesta para determinar el valor actual,
$$V_0 = 375\,000\,(1+0,06)^{-5} \qquad V_0 = 280\,221,81$$
3. Obteniendo $\ddot{V}_0$,
$$\ddot{V}_0 = 32\,000\, \ddot{a}_{\overline{15}|0\,,06} \qquad \ddot{V}_0 = 329\,439,49$$

Por lo que elegimos la 2.ª opción al ser la de mayor valor.

Solución ejercicio 5.28

$$4\,500 = 575,75\, a_{\overline{10}|i} \qquad i = 0,0475$$

6

Rentas fraccionadas y variables

6.1. Introducción
6.2. Rentas con fraccionamiento uniforme
6.2.1. Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
6.3. Ecuación de las rentas constantes, inmediatas y temporales
6.4. Rentas de términos variables en progresión geométrica
6.4.1. Renta pospagable temporal
6.4.2. Renta pospagable perpetua
6.4.3. Renta prepagable temporal
6.4.4. Renta prepagable perpetua
6.4.5. Renta diferida y anticipada
6.5. Rentas de términos variables en progresión aritmética
6.5.1. Renta pospagable temporal
6.5.2. Renta pospagable perpetua
6.5.3. Renta prepagable temporal
6.5.4. Renta prepagable perpetua
6.5.5. Renta diferida y anticipada
6.6. Rentas variables fraccionadas
6.6.1. Rentas variables fraccionadas en progresión geométrica
6.6.2. Rentas variables fraccionadas en progresión aritmética
6.7. Rentas variables en general con rédito periodal constante
6.7.1. Criterios de selección de inversiones
6.7.2. Valor capital
6.7.3. La tasa de retorno
6.7.4. Determinación de i. Método de Newton
6.7.5. Hoja de cálculo
6.7.6. Simplificación de Schneider
Ejercicios propuestos
Resolución de los ejercicios propuestos

6.1. Introducción

En la aplicación práctica del estudio de las rentas, podemos encontrarnos con que los términos de las mismas no necesariamente han de ser uniformes en toda su duración. Del mismo modo, tampoco los términos han de coincidir con los años naturales. Es muy habitual que éstos, en las operaciones financieras de inversión o financiación, sean mensuales, trimestrales, etc.

Igualmente, los términos no necesariamente serán constantes a lo largo de toda la duración de la misma. Es frecuente encontrarse con rentas crecientes en un porcentaje e incluso, con rentas variables en general.

Las *rentas fraccionadas* son aquellas en las que la periodicidad con que se hacen efectivos los sucesivos capitales es inferior al año, produciéndose pagos y cobros mensualmente, trimestralmente, semestralmente, etc.

En una renta fraccionada constante una serie de capitales de la misma cuantía están disponibles en fracciones consecutivas de año, llamadas m, durante n años. El número de términos total es $n\ m$.

6.2. Rentas con fraccionamiento uniforme

En este caso el período de capitalización es superior al período en que se percibe la renta, es decir, nos dan el interés efectivo anual i, mientras que el término C de la renta se percibe m veces dentro del año. Para encontrar el valor en este tipo de rentas fraccionadas, tendremos también que referir ambos parámetros *término* y *tanto* a la misma unidad.

Si el tanto de valoración es el nominal anual $J^{(m)}$, entonces, tal como vimos en (4.7) en la página 44, el valor de $i^{(m)}$ sería:

$$J^{(m)} = m\, i^{(m)} \qquad\qquad i^{(m)} = \frac{J^{(m)}}{m}$$

Para calcular el interés periódico $i^{(m)}$ a partir del tanto efectivo anual i dado y valorar la renta teniendo en cuenta que la duración de la misma es de $n\,m$ períodos, siendo $t = n\,m$, utilizamos la ecuación de los tantos equivalentes, vista en (4.6) en la página 43.

$$i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

y en consecuencia, como hemos visto en (5.1) en la página 59, el valor actual sería:

$$a_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-n\,m}}{i^{(m)}} \tag{6.1}$$

■

expresión que nos da el valor actual de la renta unitaria y generalizando, el valor actual de una renta constante, temporal, inmediata y pospagable de término C, duración $n\,m$ períodos a interés $i^{(m)}$, y de acuerdo con (6.1), será:

$$V_0^{(m)} = C\, a_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} \qquad\qquad V_0^{(m)} = C\,\frac{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-n\,m}}{i^{(m)}} \tag{6.2}$$

■

Una representación gráfica puede verse en la figura 6.1.

Este método, lo podemos considerar como genérico para la resolución de las rentas fraccionadas y es el que vamos a utilizar para obtener el valor actual o final

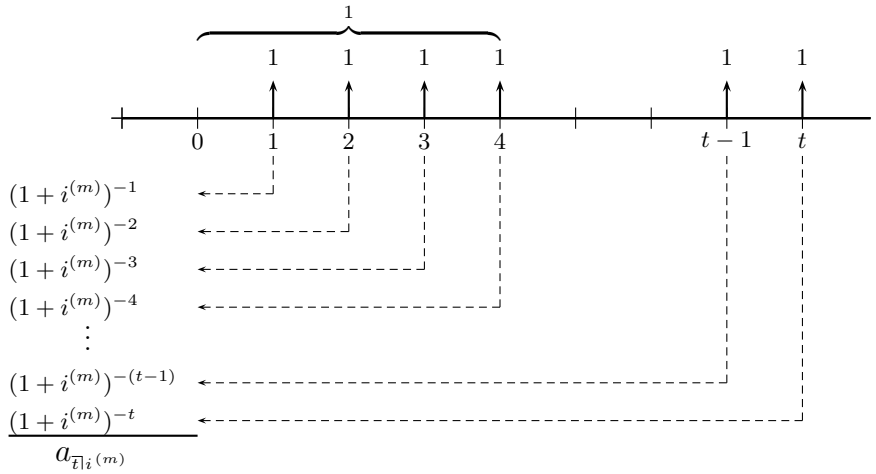


Figura 6.1: Valor actual de una renta unitaria fraccionada

de una renta pospagable o prepagable fraccionada, sea de duración determinada o perpetua.

Si se trata del valor final,

$$s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}-1}{i^{(m)}} \tag{6.3}$$

■

generalizando,

$$V_n^{(m)} = C\, s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} \qquad V_n^{(m)} = C\,\frac{\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}-1}{i^{(m)}}$$

$$V_n^{(m)} = C\, a_{\overline{n\,m}|i^{(m)}}\,\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \tag{6.4}$$

■

Ejemplo 6.1 Determinar el valor actual de una renta de 5 años de duración, al 7 % de interés anual efectivo y los términos son de 850 € trimestrales.

En primer lugar, obtendríamos el tipo de interés efectivo trimestral,

$$i^{(4)} = (1+0,07)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,0170585$$

para obtener el valor actual utilizando la expresión (6.2).

$$V_0 = 850\, a_{\overline{20}|0,0170585} = 14\,301,46$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener V_0, obtenemos $i^{(4)}$ en primer lugar:

4 [n] 100 [PV] 7 [+] [CHS] [FV] [i] resultando $1,70585$

20 [n] 850 [CHS] [PMT] 0 [FV] [PV] obteniendo la respuesta de $14\,301,46$

Si se trata del valor actual en una renta fraccionada cuyos términos sean prepagables, éste será igual al valor actual de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada, inmediata y pospagable multiplicado por $\left(1+i^{(m)}\right)$. En este caso,

$$\ddot{a}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-n\,m}}{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-1}} = \frac{1-\left(1+i^{(m)}\right)^{-n\,m}}{i^{(m)}}\,\left(1+i^{(m)}\right) \tag{6.5}$$

y, el valor final,

$$\ddot{s}_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}-1}{i^{(m)}}\,\left(1+i^{(m)}\right) \tag{6.6}$$

■

Se verifica por tanto la relación entre el valor actual y final:

$$s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = a_{\overline{n\,m}|i^{(m)}}\,\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \tag{6.7}$$

por ser $\left(1+i^{(m)}\right)^{n}$ el factor de capitalización en el intervalo $[0,m]$.

Si se trata de rentas fraccionadas perpetuas, su valor actual, vendrá expresado por:

$$a_{\overline{\infty}|i^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} \tag{6.8}$$

■

En el caso de que la renta fraccionada perpetua unitaria sea prepagable, su valor actual, será:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i^{(m)}} = 1+\frac{1}{i^{(m)}} \tag{6.9}$$

■

Ejemplo 6.2 ¿Qué capital debemos depositar en un banco que nos abona el 0,5 % mensual si pretendemos obtener una renta de 1 000 € mensuales?

$$V_0 = 1\,000\,a_{\overline{\infty}|0,005} = \frac{1\,000}{0,005} = 200\,000$$

Otra forma de valorar las rentas fraccionadas consiste, en primer lugar, en sustituir todos los pagos que se realizan en una año cualquiera por un solo pago equivalente al final del año C' (dado que en todos los años se repite la misma forma de pago) y luego valorar la renta anual y constante que resulta:

$$C' = \frac{C}{m}\,s_{\overline{m}|i^{(m)}} = \frac{C}{m}\,\frac{\left(1+i^{(m)}\right)-1}{i^{(m)}} = C\,\frac{i}{J^{(m)}}$$

por tanto, los m pagos que se realizan en el primer año forman una renta cuyo valor final C' es:

$$C' = C\,\frac{i}{J^{(m)}}$$

En consecuencia, partiendo de la ecuación (5.2) de la página 59, los valores actual y final, serían:

$$V_0^{(m)} = C\,\frac{i}{J^{(m)}}\,a_{\overline{n}|i} \tag{6.10}$$

y

$$V_n^{(m)} = C\,\frac{i}{J^{(m)}}\,s_{\overline{n}|i} \tag{6.11}$$

■

6.2.1. Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas

El valor actual de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada y diferida p períodos, es igual al valor actual de una renta temporal, constante, unitaria y fraccionada actualizado por los períodos de diferimiento, es decir, multiplicando su valor actual por $\left(1+i^{(m)}\right)^{-p\,m}$. Esto es,

$$ {}_{p}/a_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \left(1+i^{(m)}\right)^{-p\,m} a_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} \tag{6.12} $$

■

Igual ocurre con la obtención del valor final de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada y anticipada h períodos, debiendo multiplicar en este caso el valor de la renta fraccionada por su anticipación $\left(1+i^{(m)}\right)^{h\,m}$.

$$ {}_{h}/s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \left(1+i^{(m)}\right)^{h\,m} s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} \tag{6.13} $$

■

6.3. Ecuación de las rentas constantes, inmediatas y temporales

En las rentas constantes, inmediatas y temporales, podemos escribir la siguiente ecuación general que nos permite obtener cualquiera de las cinco variables financieras típicas.

$$ V_0 + (1+i\,\mu)\,C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + V_n\,(1+i)^{-n} = 0 \tag{6.14} $$

■

En la que si $\mu = 0$, se tratará de una renta pospagable, siendo por tanto $(1+i\,\mu) = 1$. Si la renta es prepagable, $\mu = 1$ y en consecuencia $(1+i\,\mu) = (1+i)$ que es el factor que convierte una renta pospagable en prepagable tal como hemos visto en (5.8).

Si $C = 0$ nos encontraríamos en un supuesto de capitalización compuesta, pudiendo obtener los valores de C_0 ó V_0 y C_n ó V_n, ya que:

$$ V_0 + V_n\,(1+i)^{-n} = 0 $$

6.4. Rentas de términos variables en progresión geométrica

Se caracterizan porque la cuantía de sus términos varían en progresión geométrica. La razón de la progresión, que representamos por q ha de ser positiva, es decir $q > 0$, puesto que en caso contrario todos los términos con exponente de q impar tendrían cuantía negativa[1].

Si $q > 1$, la renta será creciente. Si $0 < q < 1$, los términos de la renta serán decrecientes.

Dentro de las rentas geométricas cabe hacer todas las hipótesis que para las constantes hemos hecho sobre el vencimiento de los términos (pospagable y prepagable), en relación a la duración (temporal o perpetua) y con respecto al punto de valoración (inmediata, diferida o anticipada).

[1] Puede verse el apéndice A.6 en la página 172 referido a las progresiones geométricas

6.4.1. Renta pospagable temporal

El valor actual de una renta pospagable, inmediata, temporal y variable en progresión geométrica, de primer término C y razón q, con una duración de n años al tipo de interés i, será:

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = C\,(1+i)^{-1} + C\,q\,(1+i)^{-2} + C\,q^2\,(1+i)^{-3} + \cdots + \\ + C\,q^{(n-2)}\,(1+i)^{-(n-1)} + C\,q^{(n-1)}\,(1+i)^{-n}$$

que representa una serie en progresión geométrica de razón $q\,(1+i)^{-1}$; por tanto, su suma, aplicando A.11 en la página 173 será:

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = \frac{C\,(1+i)^{-1} - C\,q^{(n-1)}\,(1+i)^{-n}\,q\,(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}\,q} = \\ = C\,\frac{1-q^{(n-1)}\,(1+i)^{-n}\,q}{\dfrac{1}{(1+i)^{-1}} - q} = C\,\frac{1-q^n\,(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = C\,\frac{1-q^n\,(1+i)^{-n}}{1+i-q} \tag{6.15}$$

■

El valor final se obtendrá capitalizando el valor actual, esto es, multiplicándolo por su factor de capitalización compuesta $(1+i)^n$.

$$V_n(C,q)_{\overline{n}|i} = V_0(C,q)_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n \tag{6.16}$$

y sustituyendo,

$$V_n(C,q)_{\overline{n}|i} = C\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} \tag{6.17}$$

■

Ejemplo 6.3 Dada una renta variable en progresión geométrica de primer término 10 000 € que se incrementa anualmente un 20 %, si la duración de la misma es de 15 años y el interés del 6 % efectivo, se pide determinar el valor actual y final de la misma.

Utilizando (6.15):

$$V_0(10\,000;1,2)_{\overline{15}|0,06} = 10\,000\,\frac{1-1,2^{15}(1+0,06)^{-15}}{1+0,06-1,2} = 10\,000\,\frac{-5,4288}{-0,14} = 387\,772,27$$

Del mismo modo, sirviéndose de la relación entre el valor actual y final,

$$V_n(C,q)_{\overline{n}|i} = V_0(C,q)_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n$$

$$V_{15} = V_0(1+0,06)^{15} = 387\,772,27\,(1+0,06)^{15} = 929\,318,81$$

La razón q en muchos casos viene dada en porcentaje, por lo que en la expresión (6.15), al igual que hacemos con el tipo de interés, se reflejará en tanto por uno. Al respecto, estudiando la relación de q con respecto a $(1+i)$,

$q < (1+i)$ es el caso normal,

$q > (1+i)$ implica obtener un valor negativo, pero al ser el numerador también negativo la solución es positiva,

$q = (1+i)$ da como resultado una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Para resolverla se procederá a la actualización de cada uno de los capitales al punto de origen de la renta.

En este caso,

$$V_0(C, 1+i)_{\overline{n}|i} = \lim_{q \to 1+i} C \left[\frac{1 - q^n (1+i)^{-n}}{1+i-q} \right] = \frac{0}{0} =$$

Aplicando L'Hôpital respecto a q, para resolver la indeterminación,

$$= \frac{-(1+i)^{-n}\, n\, q^{n-1}}{-q} = n\, C\, (1+i)^{-1}$$

6.4.2. Renta pospagable perpetua

En el supuesto de que se trate de una renta perpetua, para su cálculo, bastará con hacer tender n a infinito en la expresión de su valor actual (6.15),

$$V_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n \to \infty} V_0(C, q)_{\overline{n}|i} = \frac{C}{1+i-q}$$

$$V_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{1+i-q} \tag{6.18}$$

para $1 + i > q$. ∎

6.4.3. Renta prepagable temporal

Si se trata de una renta prepagable, partiendo del principio de equivalencia financiera y del valor actual de una renta pospagable, inmediata, variable en progresión geométrica y temporal, tal como hemos visto en (6.15),

$$\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} = V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1+i) \tag{6.19}$$

Igualmente, si se trata del valor final de una renta prepagable, bastará con actualizar el valor final de la renta pospagable, inmediata, variable en progresión geométrica y temporal.

$$\ddot{V}_n(C, q)_{\overline{n}|i} = V_n(C, q)_{\overline{n}|i} (1+i) \tag{6.20}$$

Del mismo modo, partiendo del valor actual, podríamos capitalizar el mismo usando el factor de capitalización para obtener su valor final:

$$\ddot{V}_n(C, q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1+i)^n \tag{6.21}$$

6.4.4. Renta prepagable perpetua

En el supuesto de tratarse de una renta perpetua, la obtención del límite cuando n tiende a infinito del valor actual de la renta prepagable nos permitirá obtener su valor.

$$\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n \to \infty} \ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} = \frac{C\,(1+i)}{1+i-q}$$

$$\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C\,(1+i)}{1+i-q} \tag{6.22}$$

6.4.5. Renta diferida y anticipada

La obtención del valor actual de una renta diferida p períodos, pospagable, temporal y variable en progresión geométrica, tal como vimos para una renta constante en la figura 5.6 de la página 64, y la expresión (5.11),

$$ {}_p/V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = V_0(C,q)_{\overline{n}|i}\,(1+i)^{-p} \tag{6.23}$$

Si se trata de una renta prepagable, procederemos del mismo modo:

$$ {}_p/\ddot{V}_0(C,q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C,q)_{\overline{n}|i}\,(1+i)^{-p} \tag{6.24}$$

Cuando se trata de una renta perpetua, el valor actual, será el que corresponde a una temporal sobre la que obtendremos el límite cuando n tiende a ∞.

$$ {}_p/V_0(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} {}_p/V_0(C,q)_{\overline{n}|i}$$

$$ {}_p/V_0(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C\,(1+i)^{-p}}{1+i-q} \tag{6.25}$$

Si fuera prepagable,

$$ {}_p/\ddot{V}_0(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C\,(1+i)^{-(p-1)}}{1+i-q} \tag{6.26}$$

En las rentas anticipadas, para la obtención del valor final puede aplicarse lo visto en la unidad anterior. El valor final, pospagable y temporal,

$$ {}_h/V_n(C,q)_{\overline{n}|i} = V_n(C,q)_{\overline{n}|i}\,(1+i)^{h} \tag{6.27}$$

Si la renta es prepagable,

$$ {}_h/\ddot{V}_n(C,q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_n(C,q)_{\overline{n}|i}\,(1+i)^{h} \tag{6.28}$$

■

6.5. Rentas de términos variables en progresión aritmética

Se caracterizan por seguir la cuantía de sus términos una progresión aritmética, siendo d la razón de la progresión, que puede ser positiva o negativa, si bien en este segundo caso, al ser los términos decrecientes, para que no aparezcan términos negativos o nulos es preciso imponer la condición $C+(n-1)d>0$, lo que implica que la razón d está acotada inferiormente por:

$$ d > \frac{-C}{n-1}$$

6.5.1. Renta pospagable temporal

La obtención del valor actual que designaremos como $V_0(C,d)_{\overline{n}|i}$ es:

$$ V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}\big[C+(s-1)d\big](1+i)^{-s} = C\,a_{\overline{n}|i} + d\sum_{s=1}^{n}(s-1)(1+i)^{-s}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = C\, a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i}\big[a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\big]$$

de donde,

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d\, n(1+i)^{-n}}{i}$$

sumando y restando $\dfrac{d\, n}{i}$ se obtiene la expresión:

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i} + d\, n\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d\, n}{i} \tag{6.29}$$

que resulta más cómoda al venir expresada en función de $a_{\overline{n}|i}$ ∎

El valor final, $V_n(C,d)_{\overline{n}|i}$ puede obtenerse de forma directa:

$$V_n(C,d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} \big[C + (s-1)d\big](1+i)^{n-s}$$

o también, capitalizando el valor actual, es decir, multiplicando por $(1+i)^n$

$$V_n(C,d)_{\overline{n}|i} = V_0(C,d)_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \left[\left(C + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d\, n(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^n$$

resultando,

$$V_n(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right) s_{\overline{n}|i} - \frac{d\, n}{i} \tag{6.30}$$

∎

6.5.2. Renta pospagable perpetua

El valor inicial de una renta perpetua es el límite cuando $n \to \infty$ de la correspondiente renta temporal, por tanto, el valor actual de la renta pospagable, variable en progresión aritmética perpetua es:

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(C + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d\, n(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

y dado que:

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} n(1+i)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^n \log_e(1+i)} = 0$$

resulta:

$$V_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right) \frac{1}{i} = \frac{C}{i} + \frac{d}{i^2} \tag{6.31}$$

6.5.3. Renta prepagable temporal

Si se trata en este caso de una renta temporal prepagable, su valor actual puede obtenerse en función de $V_0(C,d)_{\overline{n}|i}$:

$$\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1} \big[C + s\, d\big](1+i)^{-s} =$$

$$= (1+i)\sum_{s=1}^{n} \big[C + (s-1)\, d\big](1+i)^{-s} = V_0(C,d)_{\overline{n}|i}\,(1+i)$$

resultando por tanto,

$$\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)\left[\left(C+\frac{d}{i}+d\,n\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d\,n}{i}\right] = V_0(C,d)_{\overline{n}|i}\,(1+i) \quad (6.32)$$

Igualmente, el valor final prepagable, se obtendrá capitalizando el valor actual:

$$\ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n \quad (6.33)$$

o directamente,

$$\ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n}|i} = V_n(C,d)_{\overline{n}|i}\,(1+i) \quad (6.34)$$

■

6.5.4. Renta prepagable perpetua

Si se trata de una renta prepagable perpetua, el valor inicial de la renta variable en progresión aritmética se obtiene:

$$\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty}\ddot{V}(C,d)_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}(1+i)\,V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)\,V_0(C,d)_{\overline{n}|i}$$

resultando,

$$\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} = \left(C+\frac{d}{i}\right)\frac{1+i}{i} \quad (6.35)$$

■

6.5.5. Renta diferida y anticipada

Del mismo modo que para las rentas variables en progresión geométrica, si la renta está diferida en p períodos de rédito constante i respecto del punto de valoración, su valor actual se obtiene multiplicando el valor inicial por $(1+i)^{-p}$. Si la renta está anticipada en h períodos de igual rédito i, su valor final será igual al valor final multiplicado por $(1+i)^h$.

$${}_p/V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\,V_0(C,d)_{\overline{n}|i} \quad (6.36)$$

sustituyendo,

$${}_p/V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\left[\left(C+\frac{d}{i}+d\,n\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d\,n}{i}\right]$$

Si es prepagable,

$${}_p/\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\,\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{n}|i} \quad (6.37)$$

Si se trata de una renta perpetua, procederemos del mismo modo:

$${}_p/V_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-p}\,V_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} \quad (6.38)$$

$${}_p/\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-p}\,\ddot{V}_0(C,d)_{\overline{\infty}|i} \quad (6.39)$$

Si se trata de una renta anticipada, su valor final, será:

$${}_h/V_n(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^h\,V_n(C,d)_{\overline{n}|i} \quad (6.40)$$

y sustituyendo,

$${}_h/V_n(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^h\left[\left(C+\frac{d}{i}\right)s_{\overline{n}|i} - \frac{d\,n}{i}\right]$$

que en el supuesto de que fuera prepagable, sería:

$${}_h/\ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^h\,\ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n}|i} \quad (6.41)$$

■

Ejemplo 6.4 Determinar el valor en el momento actual de una renta anual variable en progresión aritmética, de primer término 10 000 €, razón 2 000 €, rédito periodal constante $i = 0,06$, que comenzará a devengarse una vez transcurridos 3 años, en los supuestos de que se trate de una renta prepagable de 20 años de duración o de una renta pospagable perpetua.

En el primer supuesto,

$$ {}_3/\ddot{V}_0(10\,000;2\,000)_{\overline{20}|0,06} = (1+0,06)^{-3}\ddot{V}_0(10\,000;2\,000)_{\overline{20}|0,06} $$

$$ \begin{aligned} \ddot{V}_0 &= (1+0,06)^{-2}V_0(10\,000;2\,000)_{\overline{20}|0,06} = \\ &= 1,06^{-2}\left[\left(10\,000+\frac{2\,000}{0,06}+2\,000\cdot 20\right)a_{\overline{20}|0,06}-\frac{2\,000\cdot 20}{0,06}\right] = \\ &= 0,889996\,[83\,333,33\cdot 11,469921-666\,666,66] = 257\,351,33 \end{aligned} $$

En el segundo caso,

$$ \begin{aligned} {}_3/V_0(10\,000;2\,000)_{\overline{\infty}|0,06} &= (1+0,06)^{-3}V_0(10\,000;2\,000)_{\overline{\infty}|0,06} = \\ &= (1+0,06)^{-3}\left(10\,000+\frac{2\,000}{0,06}\right)\frac{1}{0,06} = \\ &= 0,839619\cdot 722\,222,22 = 606\,391,70 \end{aligned} $$

6.6. Rentas variables fraccionadas

En las rentas constantes y en general, el tipo de interés i y el período de vencimiento del capital n deben estar expresados en las misma unidad. En las rentas fraccionadas variables, supuesto muy habitual en el mercado, el capital vence en una unidad inferior a la del tanto. Para resolver este supuesto, podemos sustituir todos los capitales pertenecientes a los subperíodos por un único expresado en la misma unidad de tiempo que la razón de la variación o utilizar las siguientes expresiones.

6.6.1. Rentas variables fraccionadas en progresión geométrica

Partiendo de la expresión (6.15),

$$ V_0^{(m)}(C,q)_{\overline{n}|i} = C\,m\,\frac{i}{J^{(m)}}\,\frac{1-q^n\,(1+i)^{-n}}{1+i-q} \tag{6.42} $$

■

El resto de valores, podrán obtenerse aplicando las relaciones conocidas.

6.6.2. Rentas variables fraccionadas en progresión aritmética

La expresión matemática para el cálculo en el caso de rentas variables siguiendo una progresión aritmética, obtenida a partir de (6.29) sería:

$$ V_0^{(m)}(C,d)_{\overline{n}|i} = \frac{i}{J^{(m)}}\left(C\,m+\frac{d}{i}+d\,n\right)a_{\overline{n}|i}-\frac{d\,n}{i} \tag{6.43} $$

■

El resto de valores se obtendrían multiplicando por sus relaciones.

Ejemplo 6.5 Determinar el valor actual de una renta trimestral de 300 €, de 4 años de duración con un incremento anual del 10 % si se valora a una TAE del 5 %.

Si optamos por obtener el capital anual equivalente a las aportaciones trimestrales,

$$i^{(4)} = (1+0,05)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,012272 \qquad V_n = 300\, s_{\overline{4}|0\,,012272}$$
$$V_n = 300\,\frac{(1+0,012272)^4 - 1}{0,012272} = 1\,222,2713$$

En este caso, el valor equivalente anual de 1 222,27 € es el término C y utilizando (6.15),

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} \qquad V_0(1\,222,27;1,1)_{\overline{4}|0,05}$$
$$V_0 = 1\,222,2713\,\frac{1-1,1^4\,(1+0,05)^{-4}}{1+0,05-1,1} = 4\,999,54$$

Si aplicamos directamente la expresión (6.42), entonces,

$$V_0 = 300 \cdot 4\,\frac{0,05}{0,049089}\,\frac{1-1,1^4(1+0,05)^{-4}}{1+0,05-1,1}$$
$$V_0 = 1\,200 \cdot 1,018559 \cdot 4,090374 = 4\,999,54$$

6.7. Rentas variables en general con rédito periodal constante

En muchas operaciones financieras los términos de las mismas no son constantes, ni tampoco variables en base a una progresión conocida. En realidad, son variables de forma aleatoria.

En estos casos, existe la dificultad técnica de poder calcular la rentabilidad de la operación. Para ello, y tanto para las operaciones de inversión como las de financiación, se utilizan diferentes métodos.

6.7.1. Criterios de selección de inversiones

Algunos métodos se caracterizan por su sencillez. Entre estos, los más utilizados son el *Tanto Medio de Rentabilidad* (TMR) y el *Plazo de Recuperación* (PR) .

Tanto medio de rentabilidad

En este criterio se relaciona el rendimiento medio C_s que ofrece una inversión con el capital invertido V_0, por tanto,

$$\text{TMR} = \frac{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{s=1}^{n} C_s}{V_0} \qquad \text{TMR} = \frac{\overline{C}_s}{V_0} \tag{6.44}$$

teniendo en cuenta que los flujos netos de cada periodo son la diferencia entre los ingresos y los pagos del mismo, $C_s = I_s - P_s$.

Este criterio, no tiene en cuenta el principio de referencia temporal y por ello se considera de decisión parcial.

Plazo de recuperación o «payback»

También denominado *payback* o *paycash* es el tiempo que ha de transcurrir hasta que la suma de los rendimientos netos C_s sea igual al desembolso inicial V_0 o coste de la inversión. Si consideramos n el tiempo, entonces,

$$V_0 = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \implies n \tag{6.45}$$

Tampoco en este criterio se considera la preferencia de la liquidez, ni tiene en cuenta los rendimientos netos posteriores a la fecha del plazo de recuperación y está inspirado en una política de liquidez y no en criterios de rentabilidad.

Entre los criterios que si contemplan el tiempo, los más extendidos son el *Valor Actual Neto*, (VAN) o (VNA), y el denominado tanto o *Tasa Interna de Rendimiento* o retorno (TIR).

6.7.2. Valor capital

Es el valor actualizado de todos los rendimientos esperados, es decir, la diferencia entre el valor actualizado de los ingresos menos el valor, también actualizado, de los pagos.

$$\text{VAN} = V_0 = -C_0 + \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} \tag{6.46}$$

El valor actual V_0 obtenido, menos la inversión realizada C_0 en el momento inicial, nos dará el resultado neto o VAN.

En el caso particular de que los rendimientos C_s sean constantes, se trataría de valorar la renta constante temporal pospagable de los mismos, por lo que el VAN, sería,

$$\text{VAN} = C\, a_{\overline{n}|i} - C_0$$

Este método, tiene la ventaja de tener en cuenta los diferentes vencimientos de los flujos de caja. El criterio de decisión se aplica,

- Si VAN $> 0 \implies$ Aceptar la inversión,
- Si VAN $< 0 \implies$ Rechazar la inversión.

El cálculo del VAN precisa que se fije previamente el tanto de valoración i por parte del decisor. Esto provoca que diferentes valores de i puedan hacer que inversiones válidas para algunos, no lo sean para otros inversores.

6.7.3. La tasa de retorno

La tasa de retorno, es el tipo de interés, en capitalización compuesta, que establece la equivalencia financiera consistente en el intercambio de capitales financieros cuyos términos no son iguales en capitalización compuesta,

$$V_0 = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} \tag{6.47}$$

Si igualamos a 0, podemos obtener el valor de i. Definiremos TIR de esta operación financiera al número real i, solución de la ecuación:

$$\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} = \sum_{t=1}^{n} C_t(1+i)^{-t}$$

■

Evidentemente, n e i, deberán estar expresados en la misma unidad. La TIR obtenida estará en función de la unidad de tiempo con la que se esté trabajando. Si es el año, la TIR será el interés efectivo anual; si por el contrario la unidad de tiempo fuera una fracción de m, entonces la TIR expresada como tasa anual equivalente vendrá dada por $i = \left(1 + i^{(m)}\right)^m - 1$.

Hay que tener en cuenta que para las operaciones financieras generales, la TIR no siempre existe ni tiene por qué ser única. De hecho, constituye una ecuación algebraica de grado p, siendo $p \geq (m+n)$ que puede presentar hasta p soluciones reales.

Si existe la TIR y es positiva, puede interpretarse como el tipo de interés efectivo periodal constante que bajo el régimen de capitalización compuesta iguala el valor financiero de los capitales de la prestación con el valor financiero de los capitales de la contraprestación, es decir, como la remuneración o coste que supone para las partes llevar a cabo la operación financiera.

Para su cálculo, podemos emplear:

- Métodos directos, que permiten obtener i a través del cálculo de la tasa de retorno resultante como:
  - Método de Newton,
  - Una calculadora financiera,
  - Una hoja de cálculo,
- Métodos aproximados, como:
  - La interpolación lineal, y
  - La aproximación de Schneider.

6.7.4. Determinación de i. Método de Newton

En general, no existe una fórmula que permita calcular las raíces de la ecuación que se plantea para la obtención de la TIR de las operaciones financieras. El método de Newton [14], constituye un método numérico para obtener dichas raíces cuando los capitales de la prestación preceden a los de la contraprestación.

En este caso, por las propiedades de $g(i)$, resulta particularmente simple y eficiente la aplicación de éste método de la tangente. Consiste básicamente en lo siguiente:

Fijado un valor inicial para la variable incógnita i_0, se calcula a partir de el un nuevo valor i_1, utilizando un algoritmo $i_1 = F(i_0)$ que garantice que la distancia de i_1 a la solución de la ecuación $g(i) = 0$ (solución que denotaremos como i^*) sea menor que la distancia de i_0 a la misma. Este algoritmo se repetirá hasta que se alcance un nivel de error lo suficientemente pequeño.

Se escoge un valor inicial i_0 lo suficientemente pequeño, de tal forma que $i_0 < i^*$, siendo i^* la TIR. Dado que $g(i)$ es una función creciente y cóncava, la tangente a la curva $g(i)$ en i_0 atravesará el eje de abcisas en un punto i_1 interior al intervalo $[i_0, i^*]$; por tanto, el valor de i_1 proporcionará una aproximación por defecto a la solución i^*. Si se procede de nuevo a trazar una nueva recta tangente a la curva en el punto $(i_1, g(i_1))$, ésta intersectará al eje de abcisas en un punto interior al intervalo $[i_1, i']$. Repitiendo el proceso, y como consecuencia de las propiedades de la función $g(i)$, tras n pasos se verificará la siguiente desigualdad:

$$i_n < i_{n+1} < i^* \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

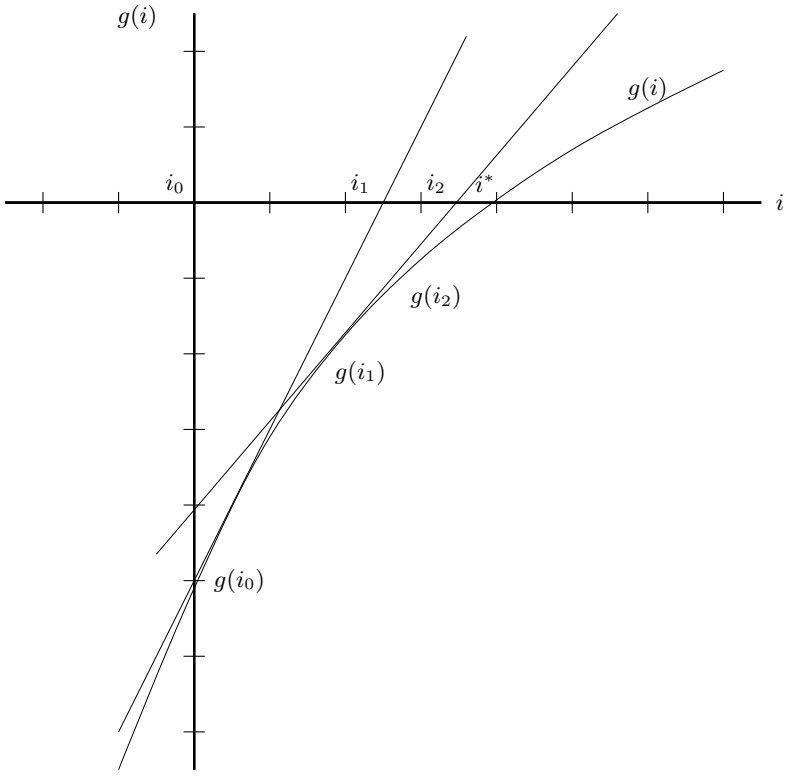


Figura 6.2: Método de Newton. Determinación de i

Es inmediato observar que,

$$g'(i_n) = \frac{-g(i_n)}{i_{n+1} - i_n}$$

por lo que,

$$i_{n+1} = i_n - \frac{g(i)}{g'(i_n)'} \tag{6.48}$$

expresión que constituye el algoritmo de Newton para resolver la ecuación que proporciona la TIR de una operación financiera como la descrita.

Repitiendo de forma indefinida este algoritmo se obtiene una sucesión creciente $i_0, i_1, i_2, \cdots$ que se irá aproximando por defecto a i^*. El proceso, se detendrá cuando la mejora obtenida se considere despreciable, esto es, cuando $i_{n+1} - i_n < \epsilon$ siendo ϵ un número positivo fijado de antemano.

Ejemplo 6.6 En una operación financiera en la que se imponen 5 000 € y al cabo de 4 años el montante es de 6 324,30 €, determinar el tipo de interés i de la misma.

Utilizando la expresión (4.3) de la página 41: $C_0 = C_n\,(1+i)^{-n}$

$$5\,000 = 6\,324,30\,(1+i)^{-4} \qquad g(i) = 5\,000 - 6\,324,30\,(1+i)^{-4} = 0$$

Si $i = 0$

$$5\,000 - 6\,324,30 = -1\,324,30$$
$$g'(i) = 6\,324,30 \cdot 5(1+i)^{-5}$$
$$g'(i_0) = g'(0) = 31\,621,50 - 6\,324,30 = 25\,297,20$$

Si $i = 1$

$$i_1 = i_0 - \frac{g(i_0)}{g'(i_0)} = 0 - \frac{-1\,324,30}{25\,297,20} = 0,0523497$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_1 - i_0 = 0,0523497 > \epsilon$, y repetimos el proceso.

$$g(i_1) = 5\,000 - 6\,324,30\,(1 + 0,0523497)^{-4} = -156,69$$

$$g'(i_1) = 6\,324,30 \cdot 4(1+i)^{-5}$$

$$g'(i_1) = g'(0,053497) = 19\,600,72$$

Si $i = 2$

$$i_2 = i_1 - \frac{g(i_1)}{g'(i_1)} = 0,0523497 - \frac{-156,69}{19\,600,72} = 0,0603438$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_2 - i_1 = 0,0603438 - 0,0523497 = 0,0079941$, y repetimos el proceso.

$$g(i_2) = 5\,000 - 6\,324,30\,(1 + 0,0603438)^{-4} = -2,9441840$$

$$g'(i_2) = 6\,324,30 \cdot 4(1+i)^{-5}$$

$$g'(i_2) = g'(0,0603438) = 18\,872,91$$

Si $i = 3$

$$i_3 = i_2 - \frac{g(i_2)}{g'(i_2)} = 0,0603438 - \frac{-2,9441840}{18\,872,91} = 0,0604998$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_3 - i_2 = 0,0604998 - 0,0603438 = 0,0001560 > \epsilon$, repetimos el proceso.

$$g(i_3) = 5\,000 - 6\,324,30\,(1 + 0,0604998)^{-4} = -0,0010920$$

$$g'(i_3) = 6\,324,30 \cdot 4(1+i)^{-5}$$

$$g'(i_3) = g'(0,0604998) = 18\,859,03$$

Si $i = 4$

$$i_4 = i_3 - \frac{g(i_3)}{g'(i_3)} = 0,0604998 - \frac{-0,0010920}{18\,859,03} = 0,0604999$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_4 - i_3 = 0,0604999 - 0,0604998 = 0,0000001$, y como $i_4 - i_3 < \epsilon$, terminamos el proceso de iteración. La raíz de la ecuación $g(i) = 0$, es $i^* = 0,0604999 \approx 6,05\,\%$ con un error de aproximación de 0,0001.

6.7.5. Hoja de cálculo

Empleando una hoja de cálculo como Excel o Calc contamos con dos funciones para la obtención de la tasa de interés o valor de i.

La función `TASA`, devuelve la tasa de interés por período de una anualidad. Así mismo, resuelve cualquiera de las cinco variables de la ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales (6.14). `TASA` se calcula por iteración y puede tener cero o más soluciones. Si los resultados sucesivos de `TASA` no convergen dentro de 0,0000001 después de 20 iteraciones, `TASA` devuelve el valor de error `#¡NUM!`

La sintaxis en Excel, sería:

```
TASA(nper;pago;va;[vf];[tipo];[estimar])
```

Puede verse la función `VA` en la ayuda de Excel para obtener una descripción completa de los argumentos `nper; pago; va; vf` y `tipo`. No obstante, las variables, se pueden describir del siguiente modo y con la correspondencia a las que venimos empleando.

`nper`	n	es el número total de períodos de pago en una anualidad.
`pago`	C	es el pago efectuado en cada período, que no puede variar durante la vida de la anualidad. Generalmente el argumento pago incluye el capital y el interés, pero no incluye ningún otro arancel o impuesto. Si se omite el argumento pago, deberá incluirse el argumento vf.
`va`	V_0	es el valor actual, es decir, el valor que tiene actualmente una serie de pagos futuros.
`vf`	V_n	es el valor futuro o un saldo en efectivo que desea lograr después de efectuar el último pago. Si el argumento vf se omite, se asume que el valor es 0 (por ejemplo, el valor futuro de un préstamo es 0).
`tipo`		es el número 0 ó 1 e indica el vencimiento de los pagos, esto es, la consideración de pospagable o prepagable.

La sintaxis de las funciones es:

```
NPER(tasa;pago;va;[vf];[tipo])
PAGO(tasa;nper;va;vf;[tipo])
VA(tasa;nper;pago;[vf];[tipo])
VF(tasa;nper;pago;[va];[tipo])
```

que permiten obtener las otras variables vistas. ■

La función `TIR` devuelve la tasa interna de retorno de los flujos de caja representados por los números del argumento `valores`. Estos flujos de caja o términos no tienen por que ser constantes, como es el caso en una anualidad como hemos visto en `TASA`. Sin embargo, los flujos de caja deben ocurrir en intervalos regulares, como años o meses. La tasa interna de retorno equivale al tipo o tasa de interés i obtenida por un proyecto de inversión que se produce en períodos regulares.

La sintaxis en Excel, sería:

```
TIR(valores; [estimar])
```

Con los siguientes argumentos:

Son `valores` obligatorios una matriz o una referencia a celdas que contienen los números o términos para los cuales desea calcular la tasa interna de retorno. El argumento `valores` debe contener al menos un valor positivo y uno negativo para calcular la tasa interna de retorno. La `TIR` interpreta el orden de los flujos de caja siguiendo el orden del argumento `valores`. Asegúrese de escribir los importes de los pagos e ingresos en el orden correcto. Si un argumento matricial o de referencia contiene texto, valores lógicos o celdas vacías, esos se pasan por alto.

El valor `estimar` es opcional. Se puede utilizar un número que el usuario estima que se aproximará al resultado de `TIR`. Excel utiliza una técnica iterativa para el cálculo de `TIR`. Comenzando con el argumento `estimar`, `TIR` reitera el cálculo hasta que el resultado obtenido tenga una exactitud de 0,00001 %. Si la `TIR` no llega a un resultado después de 20 intentos, devuelve el valor de error `#¡NUM!`. En la mayoría de los casos no necesita proporcionar el argumento `estimar` para el cálculo de la `TIR`. Si se omite el argumento `estimar`, se supondrá que es 0,1 (10 %). Si la `TIR` devuelve el valor de error `#¡NUM!`, o si el valor no se aproxima a su estimación, realice un nuevo intento con un valor diferente.

La `TIR` está íntimamente relacionada al `VNA`, la función valor neto actual. La tasa de retorno calculada por `TIR` es la tasa de interés correspondiente a un valor neto actual 0 (cero). `VNA(TIR(...);...)` = 0. ■

La función `VNA` (VAN) calcula el valor neto presente de una inversión a partir de una tasa de descuento y una serie de pagos futuros (valores negativos) e ingresos (valores positivos) según la convención de flujos (véase 1.2 en la página 3).

La sintaxis en Excel:

```
VNA(tasa;valor1;[valor2];...)
```

que tiene los siguientes argumentos:

`tasa` que es obligatorio. La tasa de descuento a lo largo de un periodo.

`valor1; valor2;...` `valor1` es obligatorio, los `valores` siguientes son opcionales. `valor1; valor2;...` deben tener la misma duración y ocurrir al final de cada periodo. `VNA` utiliza el orden de `valor1; valor2;...` para interpretar el orden de los flujos de caja. Deben escribirse los valores de los pagos y de los ingresos en el orden adecuado. Los argumentos que sean celdas vacías, valores lógicos o representaciones textuales de números, valores de error o texto que no se pueden traducir a números, no se consideran.

Si un argumento es una matriz o una referencia, sólo se considerarán los números de esa matriz o referencia. Se pasan por alto el resto de celdas.

La inversión `VNA` comienza un periodo antes de la fecha del flujo de caja de `valor1` y termina con el último flujo de caja de la lista. El cálculo `VNA` se basa en flujos de caja futuros. Si el primer flujo se produce al principio del primer periodo, el primer valor se debe agregar al resultado `VNA`, que no se incluye en los argumentos valores.

Si n es el número de flujos de caja de la lista de valores, la expresión de `VNA` es:

$$\text{VNA} = \sum_{s=1}^{n} \frac{C_s}{(1+i)^s}$$

`VNA` es similar a la función `VA` (V_0 valor actual). La principal diferencia entre `VA` y `VNA` es que `VA` permite que los flujos de caja comiencen al final o al principio del periodo. A diferencia de los valores variables de flujos de caja en `VNA`, los flujos de caja en `VA` deben permanecer constantes durante la inversión. `VNA` también está relacionado con la función `TIR` (tasa interna de retorno). `TIR` es la tasa para la cual `VNA` se iguala a cero: `VNA(TIR(...);...) = 0`. ■

6.7.6. Simplificación de Schneider

En este caso, Erich Schneider [19] propone la sustitución de la ley financiera de descuento compuesto por el descuento simple.

$$V_0 = C_1(1-i) + C_2(1-2\,i) + \cdots + C_n(1-n\,i)$$

de donde,

$$i = \frac{-V_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k}{\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_k} \tag{6.49}$$

La fórmula (6.49) sólo nos proporciona un valor aproximado de i (la tasa de retorno). Esta aproximación será tanto mayor cuanto menor sea el valor de i, ya que así, menor será el valor de los términos que se desprecian. ■

Ejemplo 6.7 De un préstamo por 1 000 000 €, los gastos de formalización, ascienden a 30 000 € (el 3 %). El préstamo, se valora al 5 % de interés efectivo pagadero por anualidades vencidas en 4 años. Determinar la TAE.

$$V_0 = C\,a_{\overline{n}|i}$$

$$1\,000\,000 = C\,a_{\overline{4}|0,05} \qquad C = \frac{1\,000\,000}{a_{\overline{4}|0,05}} = 282\,011,83$$

Si el valor recibido es: 1 000 000 − 30 000 = 970 000, el interés efectivo i, sería:

$$970\,000 = 282\,011,83\,a_{\overline{4}|i}$$

1. Por el valor actual, utilizando una calculadora financiera u hoja de cálculo:

$$970\,000 = \frac{282\,011,83}{(1+i)^1} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^2} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^3} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^4}$$

igualando y resolviendo, $i = 6{,}32\,\%$. Con la calculadora financiera, i,

970000 [PV] 4 [n] 282011,83 [CHS] [PMT] [i] obteniendo 6,32

2. Interpolando,

$$\frac{970\,000}{282\,011,83} = 3,439572$$

utilizando la aproximación de la interpolación lineal (véase A.4 en la página 169) y obteniendo los valores en las tablas financieras (véase B.3 en la página 184),

$$\frac{3,4395 - 3,3872}{3,4651 - 3,3872} = \frac{i - 0,07}{0,06 - 0,07}$$

$$i = (0,672298 \cdot -0,01) + 0,07 \qquad i = 0,063277 \qquad i = 6,32\,\%$$

3. Utilizando la aproximación de Schneider (6.49)

$$V_0 = C(1 - i) + C(1 - 2\,i) + \cdots + C(1 - n\,i)$$

$$\begin{aligned} 970\,000 = {} & 282\,011,83(1 - i) + 282\,011,83(1 - 2\,i) + \\ & + 282\,011,83(1 - 3\,i) + 282\,011,83(1 - 4\,i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 970\,000 = {} & (282\,011,83 \cdot 4) - (282\,011,83 + 282\,011,83 \cdot 2 + \\ & + 282\,011,83 \cdot 3 + 282\,011,83 \cdot 4)i \end{aligned}$$

$$i = \frac{-970\,000 + 282\,011,83 \cdot 4}{2\,820\,118,30} \qquad i = 0,0560 \qquad i = 5,60\,\%$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.1 Determinar el valor de una finca que ha sido adquirida por 40 000 € al contado y una renta de 6 000 € pagaderos por semestres vencidos durante 10 años. El tipo de interés al que se valora la operación es el 6 % anual.

Solución: $V_0 = 129\,264,85$

Ejercicio 6.2 Cierta persona tiene dos opciones para pagar una deuda en 10 años: pagar al final de cada cuatrimestre 4 500 €, o bien pagar el último día de cada mes 1 200 €. Si el tanto de valoración es del 6 %, ¿Cuál es la más ventajosa para el acreedor?

Solución: La 2.ª

Ejercicio 6.3 Determinar el valor de una vivienda sabiendo que la cuarta parte de su valor se paga al contado y el resto mediante una renta trimestral de 6 000 € pospagables, comenzando los pagos a los tres años de la compra. La duración es de 20 años y el tanto de valoración el 6 % de interés anual efectivo.

Solución: $V_0 = 315\,021,44$

Ejercicio 6.4 El propietario de un local comercial cobra 3 500 € mensuales de alquiler, el valor del local es de 400 000 €. Se quiere conocer el rendimiento unitario si el cobro se hiciera:

1. Al final de cada mes,
2. Al principio de cada mes.

Solución: 1) 11,020 % 2) 11,122 %

Ejercicio 6.5 Calcular, en base al 2 % de interés efectivo semestral, el precio a que puede venderse un inmueble cuyos ingresos y gastos, son los siguientes:

- Alquileres: 10 000 € mensuales,

- Gastos generales: 8 000 € trimestrales,
- Impuestos: 2 000 € anuales

Solución: $V_0 = 2\,181\,418,91$

Ejercicio 6.6 ¿Qué cantidad constante debe colocar un ahorrador al principio de cada semestre en un banco que computa intereses al rédito del 3,5 % efectivo anual si se pretende formar en cuatro años un capital de 15 000 €?

Solución: $C = 1\,734$

Ejercicio 6.7 ¿Qué cuantías constantes tendrán las rentas fraccionadas semestrales, trimestrales o mensuales equivalentes a una renta anual de 20 000 € si el tipo de interés efectivo anual es del 5 %?

Solución: $C^{(2)} = 9\,878,03 \qquad C^{(4)} = 4\,908,89 \qquad C^{(12)} = 1\,629,65$

Ejercicio 6.8 Si sabemos que el tipo de interés vigente en el mercado es del 5 % nominal anual, se pregunta:

1. ¿Qué diferencia hay entre percibir 12 000 € al final de cada año y percibir 1 000 € al final de cada uno de los meses de ese mismo año?
2. ¿Qué diferencia hay entre percibir 4 000 € al principio de cada año y 1 000 € al principio de cada trimestre?

Solución: 1) $V_n = 278,86 \qquad$ 2) $V_0 = 73,47$

Ejercicio 6.9 Hallar el valor de una renta inmediata, pospagable, trimestral y perpetua de término 4 500 € utilizando una valoración anual del 6 %.

Solución: $V_0 = 300\,000$

Ejercicio 6.10 Calcular el importe total disponible dentro de diez años en una entidad financiera que capitaliza trimestralmente al rédito del 4 % si se imponen en estos momentos 5 000 € y al final de cada trimestre de los primeros 6 años 1 000 €.

Solución: $V_n = 39\,072,83$

Ejercicio 6.11 ¿Qué capital se formará al cabo de tres años de efectuar imposiciones quincenales de 200 € en un banco que capitaliza al 3,5 % de interés nominal anual.

Solución: $V_n = 15\,171,52$

Ejercicio 6.12 Se desea comprar un piso y se ofrecen las siguientes modalidades de pago:

1. Al contado por 400 000 €
2. Entregando 80 000 € de entrada, 62 500 € dentro de 5 meses y el resto en pagos trimestrales de 10 000 € durante 10 años debiendo efectuar el primero dentro de 9 meses.
3. Entregando 60 000 € de entrada y el resto en mensualidades de 6 500 € durante 7 años venciendo la primera dentro de un mes.

Determinar cuál de las opciones es la más barata para el comprador si la operación se valora al 5,26 % de interés efectivo anual.

Solución: La 1.ª

Ejercicio 6.13 En una línea de ferrocarril existe un paso a nivel que tiene que ser guardado por vigilantes cuyos salarios ascienden a 1 000 € mensuales.

La construcción de un puente en dicho paso a nivel asciende a 68 000 € y tiene que ser reemplazado cada veinte años. Además, el coste de mantenimiento anual del mismo es de 3 000 €.

Estudiar si interesa a la compañía la construcción del citado puente si el tipo de interés efectivo anual es del 12 % o del 14 %.

Solución: Al 12 % el puente, al 14 % el vigilante.

Ejercicio 6.14 Una persona impone un capital determinado al 7,5 % de interés compuesto al principio de un cierto año. Tres años después se le asocia otra persona con un capital tres veces mayor.

Si al cabo de diez años la ganancia producida en conjunto para ambos asciende a 607 635,80 €, ¿cuál será el capital aportado por cada socio y la ganancia que les corresponde?

Solución: $C = 200\,000$ a) 212 206, 31 b) 395 429, 49

Ejercicio 6.15 ¿Qué capital debemos imponer en un banco que abona intereses del 4,5 % anual para que este sea suficiente para cubrir los gastos de un negocio durante 10 años, sabiendo que el año anterior ascendieron a 10 000 € y se prevee un aumento anual del 3 %. Se supone que la totalidad de los gastos, se abonan al final de cada año.

Solución: $V_0 = 92\,435, 66$

Ejercicio 6.16 Para formar un capital de 1 000 000 € se deposita durante 8 años, y al principio de cada uno de ellos una anualidad al 5 % de interés compuesto, siendo cada año 3 700 € mayor que la del año anterior. Determinar el valor de la primera imposición.

Solución: $C = 87\,730, 37$

Ejercicio 6.17 Determinar el valor actual de una renta pospagable de 15 términos sabiendo que la cuantía del primer término es de 2 500 € y los siguientes aumentan cada año en 100 € si el tipo de interés es del 5 %.

Solución: $V_0 = 32\,277, 95$

Ejercicio 6.18 Hallar la razón de las anualidades de una renta perpetua pospagable que varía en progresión geométrica, siendo su primer término 5 000 €; el tipo de interés, 6 % y habiendo pagado por ellas 250 000 €

Solución: $q = 1, 04$

Ejercicio 6.19 Una persona impone a interés compuesto el 1 de enero la cantidad de 5 000 €, y el primero de cada año sucesivas sumas que exceden en 100 € a la precedente. El 1 de julio de cada año retira: el primer año 1 000 €, y cada año sucesivo una cantidad vez y media mayor de la anterior (1 500, 2 250, 3 375, etc.) ¿Qué capital tendrá al cabo de cinco años de la primera imposición. Si los intereses se capitalizan semestralmente, en 30 de junio y 31 de diciembre de cada año, al tipo de interés del 2 % semestral?

Solución: $C_n = 15\,133, 90$

Ejercicio 6.20 Calcular el valor actual de los ingresos que percibirá una empresa en los próximos seis años sabiendo que la producción del primer año se valora en 1 000 000 € y que será incrementada cada año sobre el anterior en 200 000 € si para la valoración se utiliza el rédito anual constante del 5 %.

Solución: $V_0 = 7\,469\,290, 82$

Ejercicio 6.21 Valorar la corriente de ingresos que percibirá un determinado trabajador durante los próximos 8 años sabiendo que su sueldo actual es de 40 000 € anuales y que se prevé un aumento anual acumulativo del 2,5 % si se utiliza como rédito de valoración constante el 6 % anual.

Solución: $V_0 = 269\,210,23$ $\qquad V_n = 429\,080,20$

Ejercicio 6.22 Calcular el valor actual de una renta pospagable de las siguientes condiciones:

1. Los términos varían en progresión geométrica de razón 0,95 siendo la cuantía del primero 100 000;
2. La duración de la renta es de 12 años;
3. El tipo de interés durante los seis primeros años es del 7 % y el 9 % para los restantes 6 años.

Solución: $V_0 = 621\,667,65$

Ejercicio 6.23 Una persona impone en un banco el primero de enero de cierto año la cantidad de 10 000 € y en la misma fecha de cada año de los siguientes impone una cantidad que es un 10 % mayor que la del año anterior. ¿Qué capital reunirá al cabo de 8 años de efectuar la primera imposición si la entidad capitaliza al tanto del 5 % anual?

Solución: $\ddot{V}_n = 139\,888,01$

Ejercicio 6.24 Calcular el valor actual de una renta pospagable de 10 términos anuales cuyos tres primeros son de 8 000 €, cada uno, los cuatro siguientes de 12 000 € y los restantes de 13 000 €. Si el tipo de interés aplicable es del 6 % para los cuatro primeros y del 8 % para los restantes.

Solución: $V_0 = 76\,450,72$

Ejercicio 6.25 ¿Qué cantidad se ingresará en un banco que capitaliza al 8 % anual para que éste abone, a fin de cada año y durante doce, una renta cuyo primer término es de 50 000 € aumentando cada año un veinteavo del anterior.

Solución: $V_0 = 478\,067,91$

Ejercicio 6.26 Hallar la razón de los términos de una renta perpetua pospagable que varía en progresión geométrica siendo su primer término 60 000 €, el tipo de interés el 10 % y se ha pagado por ella 1 000 000 €.

Solución: $q = 1,04$

Ejercicio 6.27 En concepto de ingresos netos un inversor percibe las siguientes rentas:

Período	Concepto	Importe
0	Inversión inicial	180 000
1	Ingresos	12 000
2	Ingresos	30 000
3	Ingresos	40 000
4	Inversión	6 000
4	Ingresos	55 000
5	Ingresos	60 000

Determinar al 5 % el VAN y obtener la TIR.

Solución: $\text{VAN} = -19\,483,05$ $\qquad \text{TIR} = 1,67\,\%$

Ejercicio 6.28 De un catálogo deducimos que la adquisición de una maquinaria puede hacerse abonando en el acto 100 000 € y al término de cada año una anualidad que supera la anterior en un 1/25. Determinar el precio de la misma al contado, sabiendo que son en total diez pagos a realizar y que la operación se valora al 7 % de interés compuesto anual.

Solución: $V_0 = 882\,817,29$

Ejercicio 6.29 Calcular los valores actual y final de una renta descrita por:

Período	Importe
0	15 000
1	20 000
2	25 000
3	30 000
4	35 000
5	
6	45 000
7	51 750
8	59 512,50
9	68 439,37
10	78 705,28

si el tipo de interés aplicable es del 8 % para los 5 primeros años y del 10 % para los siguientes.

Solución: $V_0 = 256\,947,11 \qquad V_n = 608\,031,31$

Ejercicio 6.30 Un industrial adquiere una máquina comprometiéndose a pagarla en diez años en la forma siguiente: al final del primer año 150 000 €, al fin del segundo 170 000 €, al fin del tercero 190 000 €, y así sucesivamente hasta 330 000 € al final del décimo año. Si el tipo de interés aplicado en el contrato es del 4 %, ¿cuál es el valor de la máquina al contado?

Solución: $V_0 = 1\,894\,261,41$

Ejercicio 6.31 Determinar el valor actual a 1 de enero de un trabajador que gana 1 000 € mensuales más dos pagas en 30 de junio y 31 de diciembre si lo valoramos a $i = 3,5\,\%$ durante un año.

Solución: $V_0 = 13\,728,17$

Ejercicio 6.32 Cual es el valor dentro de dos años de una renta obtenida por un trabajador que ingresa 1 100 € mensuales en el primer año y un 6 % más en los siguientes meses del segundo año si lo valoramos a un $i = 4\,\%$.

Solución: $V_n = 28\,224,60$

Ejercicio 6.33 Determinar el ahorro al final de 4 años si los ingresos mensuales son de 1 890 €, los gastos trimestrales ascienden a 890 € el primero y 100 € más cada uno de los siguientes. Además paga 500 € prepagables cada uno de los meses en los 4 años si se valora la operación a un $i = 0,5\,\%$ mensual,

Solución: $V_n = 46\,204,66$

Ejercicio 6.34 Con imposiciones mensuales en un incremento del 4 % se quieren obtener 20 000 € dentro de 6 años. Determinar el importe de la última cuota si $i = 2,5\,\%$.

Solución: $C_{72} = 783,57$

Ejercicio 6.35 Calcular el importe total obtenido a los 3 años por un trabajador que cobra 950 € mensuales con un incremento anual del 2,5 % si se valora al 2 % efectivo anual.

Solución: $V_{36} = 36\,082,99$

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 6.1

$$V_0 = 40\,000 + 6\,000\, a_{\overline{20}|0\,,03} \qquad V_0 = 129\,264,85$$

Solución ejercicio 6.2

1. Si pagamos al final del cuatrimestre,

$$V_0 = 4\,500\, a_{\overline{10\cdot 3}|0\,,02} \qquad V_0 = 100\,784,05$$

2. El último día de cada mes,

$$V_0 = 1\,200\, a_{\overline{10\cdot 12}|0\,,005} \qquad V_0 = 108\,088,14$$

Por lo que elegimos la 2.ª opción.

Solución ejercicio 6.3

$$V_0 = \frac{1}{4}V_1 + \frac{3}{4}V_1 \qquad i^{(4)} = (1+0,06)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,014674$$
$$V_1 = 6\,000\, a_{\overline{80}|0\,,014674}(1+0,06)^{-3} = 236\,266,08$$
$$V_0 = \frac{236\,266,08 \cdot 4}{3} = 315\,021,44$$

Solución ejercicio 6.4

$$400\,000 = 3\,500\,\frac{1}{i^{(12)}} \qquad i^{(12)} = 0,008750$$
$$i = (1+0,008750)^{12} - 1 \qquad i = 0,110203 \approx 11,020\,\%$$
$$400\,000 = 3\,500\,\frac{1}{i^{(12)}}\left(1+i^{(12)}\right) \qquad i^{(12)} = 0,008827$$
$$i = (1+0,008827)^{12} - 1 \qquad i = 0,111224 \approx 11,122\,\%$$

Solución ejercicio 6.5

$$i^{(2)} = 0,02 \quad i^{(12)} = (1+0,02)^{\frac{1}{6}} - 1 \quad i^{(12)} = 0,003306$$
$$i = (1+0,02)^2 - 1 \quad i = 0,040400$$
$$i^{(4)} = (1+0,02)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad i^{(4)} = 0,009950$$

$$+\ddot{V}_0 = 10\,000\,\frac{1}{0,003306}(1+0,003306) \quad \ddot{V}_0 = \quad 3\,034\,904,04$$
$$-V_0 = 8\,000\,\frac{1}{0,009950} \quad V_0 = \quad -803\,980,18$$
$$-V_0 = 2\,000\,\frac{1}{0,040400} \quad V_0 = \quad -49\,504,95$$
$$\text{El precio, sería} \quad = \quad 2\,181\,278,33$$

Solución ejercicio 6.6

$$i^{(2)} = (1+0,035)^{\frac{1}{2}} - 1 \qquad i^{(2)} = 0,017349$$
$$15\,000 = C\,\ddot{s}_{\overline{4\cdot 2}|0\,,017349} \qquad C = 1\,734$$

Solución ejercicio 6.7

$$i^{(2)} = (1+0,05)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad i^{(2)} = 0,024695$$
$$i^{(4)} = (1+0,05)^{\frac{1}{4}} - 1 \quad i^{(4)} = 0,012272$$
$$i^{(12)} = (1+0,05)^{\frac{1}{12}} - 1 \quad i^{(12)} = 0,004074$$

$$20\,000 = C\, s_{\overline{2}|0\,,024695} \quad C = 9\,878,03$$
$$20\,000 = C\, s_{\overline{4}|0\,,012272} \quad C = 4\,908,89$$
$$20\,000 = C\, s_{\overline{12}|0\,,004074} \quad C = 1\,629,65$$

Solución ejercicio 6.8

1. Entre final de año y fin de cada mes,

$$V_n = 1\,000\, s_{\overline{12}|0\,,004167} \quad V_n = 12\,278,86 - 12\,000 = 278,86$$

2. Entre el principio de año y del trimestre,

$$V_0 = 1\,000\, \ddot{a}_{\overline{4}|0\,,004167} \quad V_0 = 3\,926,86 - 4\,000 = 73,47$$

Solución ejercicio 6.9

$$V_0 = 4\,500 \frac{1}{\frac{0,06}{4}} \qquad V_0 = 300\,000$$

Solución ejercicio 6.10

$$V_n = 5\,000 \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{10\cdot 4} + 1\,000\, s_{\overline{6\cdot 4}|0\,,01} \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{4\cdot 4}$$
$$V_n = 7\,444,32 + 31\,628,51 = 39\,072,83$$

Solución ejercicio 6.11 Sabiendo que 1 año = 24 quincenas,

$$V_n = 200\, s_{\overline{3\cdot 24}|0\,,001458} \qquad V_n = 15\,171,52$$

Solución ejercicio 6.12 Calculamos los intereses efectivos periódicos que necesitamos,

$$i^{(12)} = (1 + 0,0526)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,004281 \qquad i^{(4)} = (1 + 0,0526)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,012898$$

1. El valor al contado es de $V_0 = 400\,000$
2. En la segunda opción,

$$V_0 = 80\,000 + 62\,500\,(1 + 0,004281)^{-5} + 10\,000\,(1 + 0,012898)^{-2} a_{\overline{10\cdot 4}|0\,,012898}$$
$$V_0 = 80\,000 + 61\,179,17 + 303\,089,30 = 444\,268,47$$

3. Con la tercera,

$$V_0 = 60\,000 + 6\,500\, a_{\overline{7\cdot 12}|0\,,004281} = 517\,794,46$$

Elijo la 1.ª

Solución ejercicio 6.13

$$V_0 = 68\,000 + 3\,000\, a_{\overline{20}|0\,,12} \qquad V_0 = 90\,408,33$$
$$V_0 = 68\,000 + 3\,000\, a_{\overline{20}|0\,,14} \qquad V_0 = 87\,869,39$$

$$i^{(12)} = (1 + 0,12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,009489$$
$$i^{(14)} = (1 + 0,14)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,010979$$

$$V_0 = 1\,000\, a_{\overline{20\cdot 12}|0\,,009489} \qquad V_0 = 94\,462,30$$
$$V_0 = 1\,000\, a_{\overline{20\cdot 12}|0\,,010979} \qquad V_0 = 84\,456,76$$

Al 12 % el puente = $90\,408,33 < 94\,462,30$
Al 14 % el puente = $84\,456,76 < 87\,869,39$

Solución ejercicio 6.14

$$C_n^1 = C\,(1 + 0,075)^{10} \qquad C_n^2 = 3\,C\,(1 + 0,075)^7$$
$$C\,\left[(1 + 0,075)^{10} - 1\right] + 3\,C\,\left[(1 + 0,075)^7 - 1\right] = 607\,625,80$$
$$C = 200\,000 \qquad 3\,C = 600\,000$$

$$\begin{aligned} C_1 = 200\,000\,\left[(1 + 0,075)^{10} - 1\right] &= 212\,206,31 \\ C_2 = 600\,000\,\left[(1 + 0,075)^7 - 1\right] &= 395\,429,49 \\ (+) &= 607\,635,80 \end{aligned}$$

Solución ejercicio 6.15 Calculamos el valor actual de una renta variable en progresión geométrica,

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = C\,\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \qquad C_1 = 10\,000\cdot 1,03 = 10\,300$$
$$V_0 = 10\,300\,\frac{1-1,03^{10}(1+0,045)^{-10}}{1+0,045-1,03} \qquad V_0 = 92\,435,66$$

Solución ejercicio 6.16 Utilizando la expresión del valor final de una renta variable en progresión aritmética prepagable,

$$\ddot{V}_n(C,d)_{\overline{n}|i} = \left[\left(C+\frac{d}{i}\right)s_{\overline{n}|i} - \frac{d\,n}{i}\right](1+i)$$
$$1\,000\,000 = \left[\left(C+\frac{3\,700}{0,05}\right)s_{\overline{8}|0,05} - \frac{3\,700\cdot 8}{0,05}\right](1+0,05)$$
$$1\,000\,000 = [(C+74\,000)\,9,549109 - 592\,000]\,1,05$$
$$\frac{1\,000\,000}{1,05} = 9,549109\,C + 706\,634,06 - 592\,000$$
$$C = \frac{952\,380,95 + 592\,000 - 706\,634,06}{9,549109} \qquad C = 87\,730,37$$

Solución ejercicio 6.17 Con la ecuación del valor actual de una renta variable aritmética,

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C+\frac{d}{i}+d\,n\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d\,n}{i}$$
$$V_0 = \left(2\,500+\frac{100}{0,05}+100\cdot 15\right)a_{\overline{15}|0,05} - \frac{100\cdot 15}{0,05}$$
$$V_0 = 32\,277,95$$

Solución ejercicio 6.18 Utilizamos la expresión para la renta variable en progresión geométrica perpetua,

$$V_0(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{1+i-q}$$
$$250\,000 = \frac{5\,000}{1+0,06-q} \qquad (1,06-q)\,250\,000 = 5\,000$$
$$265\,000 - 5\,000 = 250\,000\,q \qquad q = \frac{260\,000}{250\,000} \qquad q = 1,04$$

Solución ejercicio 6.19 Hay que tener en cuenta que las imposiciones se realizan al principio de cada año, por tanto, son prepagables. Las retiradas de cada año se realizan a mitad de cada uno de los años. Por eso las diferimos un semestre.

$$i^{(2)} \qquad i = (1+0,02)^2 - 1 \qquad i = 0,040400$$

(+) $\ddot{V}_n(5\,000;100)_{\overline{5}|0,0404}(1+0,0404)$
$$\left[\left(5\,000+\frac{100}{0,0404}\right)s_{\overline{5}|0,0404} - \frac{100\cdot 5}{0,0404}\right]1,0404 = \quad 29\,281,53$$

(−) $q = \dfrac{1\,500}{1\,000} = 1,5$
$\ddot{V}_n(1\,000;1,5)_{\overline{5}|0,0404}(1+0,0404)(1,02)^{-1}$
$$1\,000\,\frac{(1,0404)^5 - 1,5^5}{1+0,0404-1,5}1,0404\cdot 1,02^{-1} = \qquad 14\,147,63$$

(=) $\qquad 15\,133,90$

Solución ejercicio 6.20

$$V_0(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C+\frac{d}{i}+d\,n\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d\,n}{i}$$
$$V_0 = \left(1\,000\,000+\frac{200\,000}{0,05}+200\,000\cdot 6\right)a_{\overline{6}|0,05} - \frac{200\,000\cdot 6}{0,05}$$
$$V_0 = 7\,469\,290,82$$

Solución ejercicio 6.21

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = \frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$V_0 = 40\,000\,\frac{1-1,025^8(1+0,06)^{-8}}{1+0,06-1,025} \qquad V_0 = 269\,210,23$$

Solución ejercicio 6.22 Debemos tener en cuenta para la valoración el cambio de tipo de interés que se produce en el sexto año.

El término varible geométricamente en el 7.º año, es,

$$C_7 = 100\,000 \cdot 0,95^6 = 73\,509,19$$

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = \frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

$$\begin{array}{lll}
(+) & V_0(100\,000;0,95)_{\overline{6}|0,07} & \\
 & V_0 = 100\,000\,\dfrac{1-0,95^6(1+0,07)^{-6}}{1+0,07-0,95} = & 425\,147,70 \\
(+) & V_0(C_7;0,95)_{\overline{6}|0,09}\,(1+0,'07)^{-6} & \\
 & V_0 = 73\,509,19\,\dfrac{1-0,95^6(1+0,09)^{-6}}{1+0,09-0,95}(1+0,07)^{-6} = & 196\,519,95 \\
(=) & & 621\,667,65
\end{array}$$

Solución ejercicio 6.23

$$\ddot{V}_n(C,q)_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}(1+i)$$

$$\ddot{V}_n = 10\,000\,\frac{(1+0,05)^8 - 1,1^8}{1+0,05-1,1}(1+0,05) \qquad V_n = 139\,888,01$$

Solución ejercicio 6.24

$$V_0 = 8\,000a_{\overline{3}|0,06} + 12\,000\,(1+0,06)^{-4} + 12\,000a_{\overline{3}|0,08}(1+0,06)^{-4} + \\ +13\,000a_{\overline{2}|0,08}(1+0,08)^{-3}(1+0,06)^{-4} \qquad V_0 = 76\,450,72$$

Solución ejercicio 6.25

$$\frac{1}{20} = 5\,\% \qquad q = 1,05$$

$$V_0 = 50\,000\,\frac{1-1,05^{12}(1+0,08)^{-12}}{1+0,08-1,05} \qquad V_0 = 478\,067,91$$

Solución ejercicio 6.26

$$100\,000 = \frac{60\,000}{1+0,1-q} \qquad (1,1-q)\,1\,000\,000 = 60\,000$$

$$1\,100\,000 - 1\,000\,000\,q = 60\,000$$

$$1\,040\,000 = 1\,000\,000\,q \qquad q = 1,04$$

Solución ejercicio 6.27 Este ejercicio se resuelve con hoja de cálculo.

Solución ejercicio 6.28

$$\ddot{V}_0(100\,000;1,04)_{\overline{10}|0,07} \qquad \ddot{V}_0 = 100\,000\,\frac{1-1,04^{10}(1+0,07)^{-10}}{1+0,07-1,04}(1+0,07)$$

$$\ddot{V}_0 = 882\,817,29$$

Solución ejercicio 6.29

$$\ddot{V}_0(15\,000;5\,000)_{\overline{5}|0,08} + V_0(45\,000;1,15)_{\overline{5}|0,10}\,(1+0,08)^{-5}$$

$$\ddot{V}_0\left[\left(15\,000 + \frac{5\,000}{0,08} + 5\,000\cdot 5\right)_{\overline{5}|0,08} - \frac{5\,000\cdot 5}{0,08}\right]1,08 = 104\,493$$

$$V_0 = 45\,000\,\frac{1-1,15^5(1+0,10)-5}{1+0,1-1,15}(1+0,08)^{-5} = 152\,454,11$$

$$V_0 = 104\,493 + 152\,454,11 = 256\,947,11$$

$$V_n = 256\,947,11(1+0,08)^5(1+0,10)^5 = 608\,031,31$$

Solución ejercicio 6.30 Obtenemos el V_0 de la renta aritmética que supone,

$$V_0 = \left(150\,000\frac{20\,000}{0,04} + 20\,000 \cdot 10\right) a_{\overline{10}|0\,,04} - \frac{20\,000 \cdot 10}{0,04}$$
$$V_0 = 850\,000\, a_{\overline{10}|0\,,04} - 5\,000\,000 \qquad V_0 = 1\,894\,261,41$$

Solución ejercicio 6.31

$$i^{(12)} = (1+0,035)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i^{(12)} = 0,002871$$
$$i^{(2)} = (1+0,035)^{\frac{1}{2}} - 1 \qquad i^{(2)} = 0,017349$$

$$V_0 = 1\,000\, a_{\overline{12}|0\,,002871} = 11\,779,04$$
$$V_0 = 1\,000\, a_{\overline{2}|0\,,017349} = 1\,949,13$$
$$(+) = 13\,728,17$$

Solución ejercicio 6.32

$$i^{(12)} = (1+0,04)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i^{(12)} = 0,003274$$

$$V_n' = 1\,100\, s_{\overline{12}|0\,,003274}\,(1+0,04) = 13\,977,80$$
$$V_n'' = 1\,166\, s_{\overline{12}|0\,,003274} = 14\,246,70$$
$$(+) = 28\,224,60$$

Solución ejercicio 6.33 En primer lugar, convertimos los ingresos mensuales en su equivalente anual valorados al i dado, haciendo previamente la equivalencia de los tipos de interés.

$$i = (1+0,005)^{12} - 1 \qquad i = 0,061678$$
$$i^{(4)} = (1+0,06178)^{\frac{1}{4}} - 1 \qquad i^{(4)} = 0,015075$$

$$V_n = 1\,890\, s_{\overline{4\cdot 12}|0\,,005} \qquad (+) = 102\,244,90$$
$$V_n(890;100)_{\overline{16}|0,015075} = \left(890 + \frac{100}{0,015075}\right) s_{\overline{16}|0\,,015075} -$$
$$-\frac{100 \cdot 16}{0,015075} \qquad (-) = 28\,856,14$$
$$\ddot{V}_n = 500\, \ddot{s}_{\overline{48}|0\,,005} \qquad (-) = 27\,184,16$$
$$= 46\,204,66$$

Solución ejercicio 6.34

$$i^{(12)} = (1+0,025)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i^{(12)} = 0,002060$$
$$20\,000 = C\,\frac{(1+0,002060)^{72} - 1,04^{72}}{1+0,002060-1,04}$$
$$20\,000 = 413,350059\, C \qquad C = 48,385139$$
$$C_{72} = C_1\, q^{n-1} \qquad C_{72} = 48,385139 \cdot 1,04^{71} \qquad C_{72} = 783,57$$

Solución ejercicio 6.35 En primer lugar debemos obtener el equivalente anual al sueldo mensual.

$$i^{(12)} = (1+0,02)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i^{(12)} = 0,001652$$
$$V_{12} = 950\, s_{\overline{12}|0\,,001652} \qquad V_{12} = 11\,504,13$$
$$V_3(11504,13;1,025)_{\overline{3}|0,02} = 11\,504\,\frac{(1+0,02)^3 - 1,035^3}{1+0,02-1,025}$$
$$V_3 = 11\,504,13 \cdot 3,136525 \qquad V_3 = 36\,082,99$$

7

Operaciones de constitución. Préstamos

7.1. Operación de constitución
- 7.1.1. Elementos de la constitución
- 7.1.2. Constitución de un capital mediante imposiciones constantes

7.2. Prestamos: conceptos básicos. Clasificación
- 7.2.1. Elementos de un préstamo
- 7.2.2. El tipo de interés. Componentes
- 7.2.3. Clasificación

7.3. Préstamos amortizables con reembolso único
- 7.3.1. Reembolso único
- 7.3.2. Reembolso único con fondo de amortización
- 7.3.3. Reembolso único y pago periódico de intereses. Préstamo americano

7.4. Préstamo francés
- 7.4.1. Anualidad
- 7.4.2. Capital pendiente
- 7.4.3. Cuotas de amortización
- 7.4.4. Capital amortizado, cuotas de interés
- 7.4.5. El cuadro de amortización

7.5. Tanto efectivo para el prestatario

7.6. Amortización con términos variables en progresión geométrica

7.7. Amortización con términos variables en progresión aritmética

7.8. Amortización de cuota de capital constante. Método italiano

7.9. Préstamo alemán o «anticipativenzisen»

7.10. Amortización con intereses fraccionados

7.11. Carencia e interés variable
- 7.11.1. Carencia
- 7.11.2. Tipo de interés variable

7.12. Valor financiero del préstamo, del usufructo y de la nuda propiedad
- 7.12.1. Caso particular. La fórmula de Achard
- 7.12.2. Aplicación a los métodos de amortización más utilizados

Ejercicios propuestos

Resolución de los ejercicios propuestos

7.1. Operación de constitución

Se da esta denominación a toda operación compuesta de prestación múltiple $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y contraprestación única C_n, siendo el vencimiento de la contraprestación igual o posterior al último vencimiento de la prestación.

Se denomina también de formación de capital y tiene su base en que siempre puede suponerse que la prestación tiene la finalidad de formar o constituir el capital que se recibirá en concepto de contraprestación.

También se utiliza para instrumentar operaciones de ahorro como los fondos de inversión en sus diversas modalidades, los planes de ahorro, cuyo objeto es fomentar el ahorro de los particulares y los planes de pensiones.

Los planes de pensiones tratan de canalizar parte del ahorro de los trabajadores en activo para complementar su pensión en el momento de la jubilación. En España tienen un tratamiento fiscal favorable siempre que se acojan a la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones, aprobado por el Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre.

En muchas ocasiones, el capital constituido en vez de recibirse de una sola vez en el momento de la jubilación, se sustituye por una renta temporal o vitalicia.

7.1.1. Elementos de la constitución

Es usual concertar la operación con una ley de capitalización (compuesta) y con periodos uniformes (meses, trimestres,...). Lo habitual será obtener el cálculo de las imposiciones si el objetivo es obtener una cuantía determinada C_s o determinar el capital formado C_s al final de s periodos. En resumen, los elementos que intervienen en las operaciones de constitución, son los siguientes:

C_n = cuantía del capital a formar o contraprestación,
$a_1, a_2, \cdots, a_s$ = cuantía de la imposición, *anualidades*, *mensualidades*, etc. al principio del periodo s,
n = número de períodos,
i = tasa o tipo de interés,
I_s = cuotas de interés de cada período,
Δ_s = cuota de constitución del periodo s,
C_s = cuantía del capital formado al final del momento s,
K_s = cuantía del capital pendiente de formación al final del año s.

7.1.2. Constitución de un capital mediante imposiciones constantes

Se denomina también método progresivo. Es el método más frecuentemente usado y consiste en constituir un capital mediante pagos de igual cuantía a al principio de cada periodo y durante n, con rédito periodal i constante, para obtener la cuantía final C_n.

Responde por tanto a la hipótesis:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$
$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

La equivalencia financiera, viene dada por:

$$C_n = a\, \ddot{s}_{\overline{n}|i} = a\,(1+i)\, s_{\overline{n}|i} \tag{7.1}$$

$$a = \frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} \tag{7.2}$$

■

Al final del periodo s, la cuantía obtenida utilizando el método retrospectivo, sería:

$$C_s = a\,\ddot{s}_{\overline{s}|i} = C_n \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \tag{7.3}$$

El capital pendiente de constitución al final del periodo s, viene dado por,

$$K_s = C_n - C_s = C_n \left(1 - \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}\right) = K_{s-1} - \Delta_s \tag{7.4}$$

Los intereses de cada periodo, pueden obtenerse como,

$$I_s = \Delta_s - a = (C_{s-1} + a)\,i \tag{7.5}$$

y las cuotas de constitución son la suma de las aportaciones más los intereses,

$$\Delta_s = a_s + I_s$$

o también, sabiendo que $\Delta_1 = a\,(1+i)$

$$\Delta_s = \Delta_{s-1}\,(1+i) = \Delta_1\,(1+i)^{s-1} \tag{7.6}$$

que hará que se cumpla la relación,

$$C_s = C_{s-1} + \Delta_s = \sum_{r=1}^{s} \Delta_r$$

En la figura 7.1 podemos ver la representación de una operación de constitución.

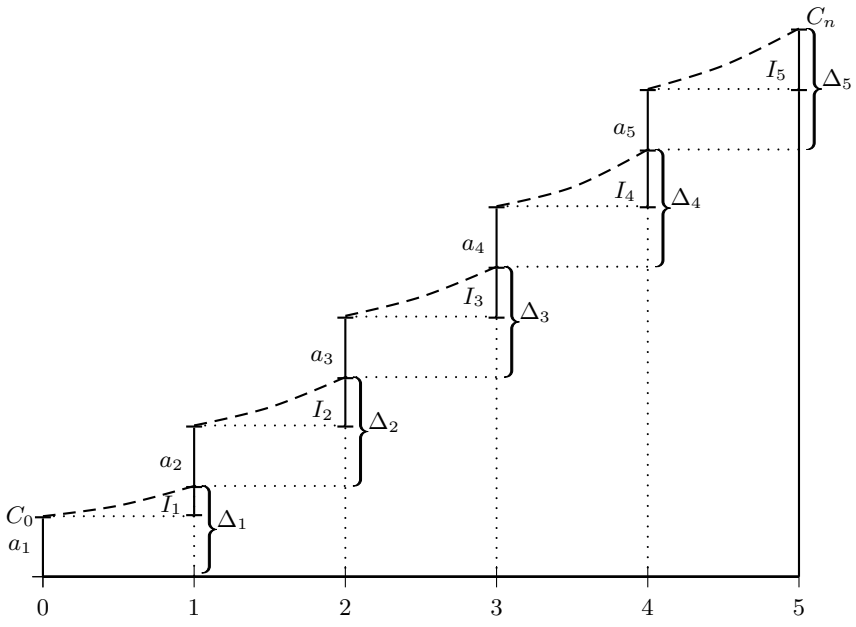


Figura 7.1: Constitución de capital

Resulta útil recoger en un cuadro los valores que en el transcurso de la operación van tomando las magnitudes más importantes que intervienen en el proceso constitutivo de un capital. A este cuadro se le denomina *cuadro de constitución* y puede realizarse de la siguiente forma:

Per n	Término a	Intereses I_s	Constitución Δ_s	Constituido C_s	Pendiente K_s
0					K_0
1	$a=\frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i}}$	$I_1=\Delta_1-a$	$\Delta_1=a(1+i)$	$C_1=\Delta_1$	$K_1=K_0-\Delta_1$
2	$a=\frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i}}$	$I_2=\Delta_2-a$	$\Delta_2=\Delta_1(1+i)$	$C_2=C_1+\Delta_2$	$K_2=K_1-\Delta_2$
$\vdots$					
s	$a=\frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i}}$	$I_s=\Delta_s-a$	$\Delta_s=\Delta_{s-1}(1+i)$	$C_s=C_{s-1}+\Delta_{s-1}$	$K_s=K_{s-1}-\Delta_s$
$\vdots$					
n	$a=\frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i}}$	$I_n=\Delta_n-a$	$\Delta_n=\Delta_{n-1}(1+i)$	$C_n=C_{n-1}+\Delta_{n-1}$	$K_n=K_{n-1}-\Delta_n$ $K_n=0$

En el caso de que las imposiciones sean en m-ésimos de año se procede de la misma forma, teniendo en cuenta que el número de periodos será $n\,m$ y el rédito vendrá dado como $i^{(m)}$.

Ejemplo 7.1 Queremos constituir un plan de pensiones con aportaciones periódicas anuales de 1 200 € para formar un capital en el momento de la jubilación. Si el tipo de interés es del 4 %, obtener:

- la cuantía final obtenida dentro de 35 años,
- el cuadro de constitución de los 3 primeros años, y
- la cantidad a imponer para obtener un montante final de 110 000 €.

Para obtener el capital o montante final, utilizando (7.1),

$$C_n = a\,\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i} \qquad C_n = 1\,200\,\ddot{s}_{\overline{35}\rceil 0\,,04} = 91\,917,98$$

Si utilizamos la calculadora financiera, C_n

[g] [BEGIN] 35 [n] 4 [i] 0 [PV] 1200 [CHS] [PMT] [FV] obteniendo 91 917, 98

El cuadro correspondiente a los tres primeros períodos lo realizamos según el modelo.

n	a	I_s	Δ_s	C_s	K_s
0					91 917,98
1	1 200	48,00	1 248,00	1 248,00	90 669,98
2	1 200	97,92	1 297,92	2 545,92	89 372,06
3	1 200	149,84	1 349,84	3 895,76	88 022,22
$\vdots$					

Utilizando la ecuación general,

$$C_n = a\,\ddot{s}_{\overline{35}\rceil 0\,,04} \qquad 110\,000 = a\,\ddot{s}_{\overline{35}\rceil 0\,,04} \qquad a=\frac{110\,000}{76,598314}=1\,436,06$$

Con la calculadora financiera,

[g] [BEGIN] 35 [n] 4 [i] 0 [PV] *numero*110000 [FV] [PMT] obteniendo 1 436, 06

7.2. Prestamos: conceptos básicos. Clasificación

Recibe este nombre toda operación financiera formada por una prestación única C_0 y contraprestación múltiple $a_1, a_2, \cdots, a_n$. La finalidad de la contraprestación es reembolsar el capital inicial C_0.

Un *préstamo*, es la operación financiera que consiste en la entrega, por parte de una persona (*prestamista*), de una cantidad de dinero, C_0, a otra (*prestatario*), quien se compromete a devolver dicha cantidad y satisfacer los intereses correspondientes en los plazos y forma acordados.

Se denomina *amortización* de un préstamo a la devolución o reembolso, por parte del prestatario, del importe del préstamo, C_0, junto con el pago de los intereses que va generando, en los plazos convenidos. Esto justifica el nombre de operación de amortización y el de términos amortizativos que suele asignarse a estos capitales de la contraprestación.

La operación de préstamo, así conformada, cumple el postulado de *equivalencia financiera* entre la cantidad entregada por el prestamista y la contraprestación múltiple del prestatario, en cualquier instante de tiempo; es decir, el valor actual del capital prestado debe ser igual al valor actual del capital que se reembolse (amortice). En el caso de que la contraprestación esté integrada por varios capitales financieros, la suma de los valores actuales de éstos tendrá que ser igual al valor actual del capital recibido en préstamo.

Es usual efectuar la operación con una ley de capitalización (generalmente la capitalización compuesta), y con períodos uniformes (años, trimestres, meses,...) siendo los más frecuentes los mensuales.

7.2.1. Elementos de un préstamo

Los problemas principales que plantea la amortización de un préstamo son: determinar la anualidad o término amortizativo, cálculo del capital pendiente de amortizar al principio de cada término y de la parte de deuda que se devuelve al final de cada término. En resumen, los elementos que intervienen en las operaciones de préstamo, son los siguientes:

C_0 = capital o importe del préstamo,

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ = términos amortizativos. Se denominan *anualidades*, *mensualidades*, etc. y normalmente se forman de una cantidad destinada a la amortización A_s y otra al pago de intereses I_s. $a_s = A_s + I_s$

n = tiempo o vida de duración de la operación del préstamo, n_0 es el origen de la operación,

i = tipo de interés. Puede ser constante o variable,

A_s = cuotas de amortización o de capital de cada uno de los períodos,

I_s = cuotas de interés de cada período,

M_s = cantidades de capital amortizado al final de cada período. Total amortizado. $M_s = \sum_{s=1}^{s} A_s$,

C_s = capital pendiente de amortizar. $C_s = C_0 - M_s$.

7.2.2. El tipo de interés. Componentes

El tipo de interés se suele determinar como un porcentaje de la cantidad prestada. En cualquier caso, puede resultar confuso hablar del tipo de interés como algo único, ya que en un momento dado hay diferentes tipos, que normalmente difieren por las razones siguientes:

- El *riesgo de la operación*. Cuando se concede un préstamo, siempre existe el riesgo de que éste no se recupere. Este riesgo será, sin embargo, muy distinto según las características del que lo solicita.

- La *garantía que ofrezca el solicitante del préstamo*. Los préstamos suelen demandar algún tipo de garantía; por ejemplo, en el caso del préstamo hipotecario, el prestamista tiene como garantía la propiedad del solicitante.
- El *período para el que se concede el préstamo*. Dependiendo del período por el que se concede el préstamo, variará el tipo de interés. Si es a largo plazo, conllevará un tipo más alto que si es a corto plazo.

El tipo de interés de un préstamo, tiene tres componentes:

1. El *tipo puro*, que es la remuneración que se exigirá por renunciar al consumo en el caso de que no hubiese inflación y que el préstamo careciera de riesgo.
2. Una *prima de riesgo*, que se añade al tipo puro para compensar el riesgo que conlleva el préstamo.
3. Una *prima de inflación* con la que el prestamista trata de asegurarse que la rentabilidad que obtiene en términos de capacidad adquisitiva, es decir, en términos reales, cubre el riesgo puro y la prima de riesgo.

7.2.3. Clasificación

La variedad de préstamos existentes puede agruparse, atendiendo a diferentes criterios. En este contexto y de acuerdo con los objetivos, se sigue el criterio de «amortización».

1. Préstamos amortizables con reembolso único
   a) Reembolso único,
   b) Reembolso único y pago periódico de intereses,
   c) Reembolso único con fondo de amortización,
2. Préstamos amortizables mediante una renta
   a) Amortización con fondos de amortización,
   b) Amortización por constitución del montante,
   c) Amortización con anualidades constantes, préstamo francés,
   d) Amortización con anualidades variables: en progresión aritmética, en progresión geométrica,...
   e) Método de cuota constante,
   f) Método alemán.

7.3. Préstamos amortizables con reembolso único

7.3.1. Reembolso único

Este préstamo, conocido también como préstamo elemental o simple, se caracteriza porque el préstamo recibido junto con sus intereses se reembolsa de una sola vez. Siendo C el capital prestado, i el tanto unitario de interés y n el plazo señalado para el reembolso, al final del plazo estipulado, el prestatario deberá reembolsar al prestamista el montante final del capital C al tanto i.

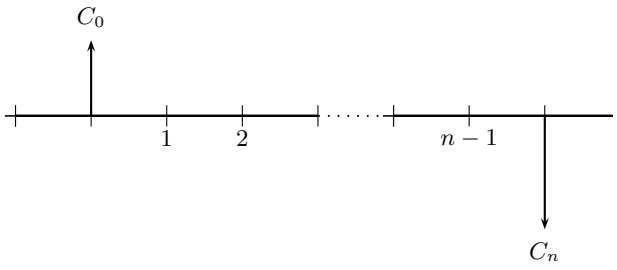
Al no entregarse ninguna cantidad hasta la finalización de la vida del préstamo, el valor de las variables, sería:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = 0$$

$$a_n = C_0(1+i)^n \tag{7.7}$$

que recuerda a una operación financiera con una sola prestación y contraprestación tal como se vió en (4.1) en la página 40. ∎

Gráficamente,



Ejemplo 7.2 Determinar el montante a devolver dentro de 8 años por un préstamo de 50 000 € pactando la operación al 6 %.

$$a_n = C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_n = 50\,000(1+0,06)^8 = 79\,692,40$$

Un problema que puede surgir en este tipo de préstamos es cuando el deudor o prestatario pretende cancelar total o parcialmente el préstamo de forma anticipada. En este caso, transcurridos s períodos desde el comienzo de la operación, es usual que el prestamista efectúe operaciones de la misma naturaleza a un tipo de interés i' distinto de i (tipo de la operación en vigor). El prestamista, tiene que recibir al final C_n y cualquier deseo de alterar el prestatario las condiciones iniciales de la operación sólo podrá ser aceptado por el prestamista si, como mínimo, obtiene los rendimientos esperados en su vigente contrato.

Por tanto, para *cancelar anticipadamente el préstamo*, al principio del período s, se exigirá como mínimo la cantidad V_s tal que se verifique la igualdad:

$$V_s(1+i')^{n-s} = C_n$$

Expresando C_n en función de C_s,

$$V_s(1+i')^{n-s} = C_s(1+i)^{n-s} \qquad V_s = C_s\left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^{n-s} \tag{7.8}$$

Si solamente se pretende *reembolsar parcialmente*, entregando una cuantía $X_s < V_s$, el nuevo saldo o deuda pendiente será el valor C'_s que cumpla la ecuación:

$$X_s(1+i')^{n-s} + C'_s(1+i')^{n-s} = C_n = C_s(1+i)^{n-s}$$

de donde,

$$C'_s = C_s\left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^{n-s} - X_s \qquad C'_s = C_0\frac{(1+i)^n}{(1+i')^{n-s}} - X_s \tag{7.9}$$

∎

Ejemplo 7.3 Determinar para el préstamo anterior el saldo o capital vivo al principio del año quinto y la cantidad a devolver al principio del quinto año si el tanto del prestamista es $i' = 8\,\%$. Obtener igualmente el saldo pendiente en el supuesto de que hiciera una entrega parcial al principio del quinto año de 40 000 €.

$$C_4 = 50\,000(1 + 0,06)^4 = 63\,123,85$$

Utilizando (7.8), el valor, sería:

$$V_4 = C_4 \left(\frac{1 + 0,06}{1 + 0,08}\right)^{8-4} = 58\,576,30$$

Al hacer una entrega parcial, el saldo aplicando (7.9):

$$C_4' = 58\,576,30 \left(\frac{1 + 0,06}{1 + 0,08}\right)^{8-4} - 40\,000 = 14\,356,36$$

7.3.2. Reembolso único con fondo de amortización

En este tipo, no se paga ninguna cantidad periódica pero sí se constituye un fondo mediante imposiciones de F_s de tal modo, que al final de la operación el importe constituido sea suficiente para saldar el capital prestado junto con sus intereses.

El capital pendiente de amortizar o reserva matemática en un momento s, sería:

$$C_s = C_0(1 + i)^s - F s_{\overline{s}|i} \tag{7.10}$$

■

7.3.3. Reembolso único y pago periódico de intereses. Préstamo americano

Este tipo de préstamos difiere de la modalidad anterior en que el prestatario que recibe un préstamo C, está obligado a satisfacer cada año el pago de la cantidad $C\,i$, intereses de su deuda al tanto i, y reembolsar, mediante un pago único de C el capital que recibió como préstamo al término del año n.

Préstamo americano

En este caso particular, el préstamo recibido se reembolsa de una sola vez, pero al final del período se pagan los intereses generados:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = C_0\,i \qquad\qquad a_n = C_0 + C_0\,i$$

Expresado de otra forma, recibe el nombre de amortización americana cuando son nulas las $n - 1$ primeras cuotas de amortización e igual a C_0 la última, o sea:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_{n-1} = 0 \qquad\qquad A_n = C_0$$

Los intereses, en consecuencia, serán:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \cdots = I_n = C_0\,i$$

■

Ejemplo 7.4 Determinar las variables de un préstamo de 200 000 € por el sistema americano si $i = 8\,\%$ y tiene una duración de 10 años.

$$\begin{aligned}
&I_1 = I_2 = \cdots = I_{10} = 200\,000 \cdot 0,08 = 16\,000\\
&a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = C_0\,i = 200\,000 \cdot 0,08 = 16\,000\\
&a_{10} = C_0 + C_0\,i = 200\,000 + 16\,000 = 216\,000\\
&A_1 = A_2 = \cdots = A_9 = 0\\
&A_{10} = C_0 = 200\,000
\end{aligned}$$

Préstamo americano con fondo de amortización «sinking fund»

Consiste en suponer que una parte de a_s se destina al pago de los intereses del capital inicial C_0 y el resto, F_s llamado *fondo de amortización* se aplica para la constitución del capital tal como hemos visto en (7.10).

El capital pendiente de amortizar en un instante s cualquiera, a través del método retrospectivo, vendrá determinado por:

$$C_s = C_0 - F s_{\overline{s}|i} \tag{7.11}$$

■

Ejemplo 7.5 Calcular el valor de un fondo para amortizar un préstamo americano de 1 000 000 € si $i = 4\,\%$ a 5 años.

$$F = \frac{C_0}{s_{\overline{5}|i}} = \frac{1\,000\,000}{\dfrac{(1+0,04)^5 - 1}{0,04}} = \frac{1\,000\,000}{5,416323} = 184\,627,10$$

Con la calculadora financiera, F,

5 [n] 4 [i] 1000000 [FV] [PMT] resultando 184 627, 10

7.4. Préstamo francés

Los métodos particulares de amortización surgen al establecer la hipótesis sobre los términos amortizativos, las cuotas de amortización, la ley financiera de valoración o respecto a cualquier otra de las variables que intervienen en la operación financiera.

El *préstamo francés* o de términos amortizativos constantes, se caracteriza porque:

- Los términos amortizativos permanecen constantes, y
- El tanto de valoración permanece constante.

ambos durante toda la vida del préstamo,

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a \\ i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i \end{aligned}$$

y en consecuencia,

- Las *anualidades* son todas iguales.
- Los *intereses* de cada período, van disminuyendo para cada anualidad.
- Las *cuotas de amortización* de cada período, van incrementándose.

Gráficamente, su diagrama de flujos, estaría representado tal como se muestra en la figura 7.2.

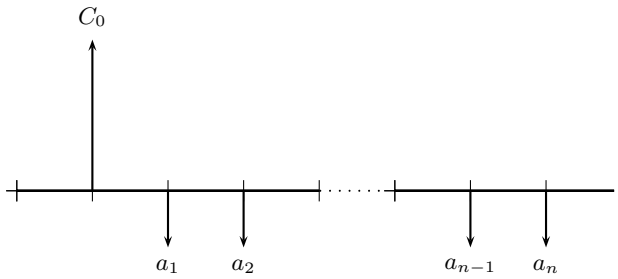


Figura 7.2: Préstamo francés

7.4.1. Anualidad

En este caso,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$
$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

La *anualidad* se obtiene planteando la equivalencia financiera:

$$C_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-n}$$
$$C_0 = a\, a_{\overline{n}|i}$$

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}} \tag{7.12}$$

Los términos amortizativos, anualidades, se descomponen en dos partes: cuota de amortización y cuota de interés. De este modo:

$$a = A_s + I_s \tag{7.13}$$

La evolución del capital vivo, así como de las variables A_s e I_s están representadas en el gráfico 7.3. De esta forma, al principio la mayor parte de la cuota son intereses, siendo la cantidad destinada a amortización muy pequeña. Esta proporción va cambiando a medida que el tiempo va transcurriendo.

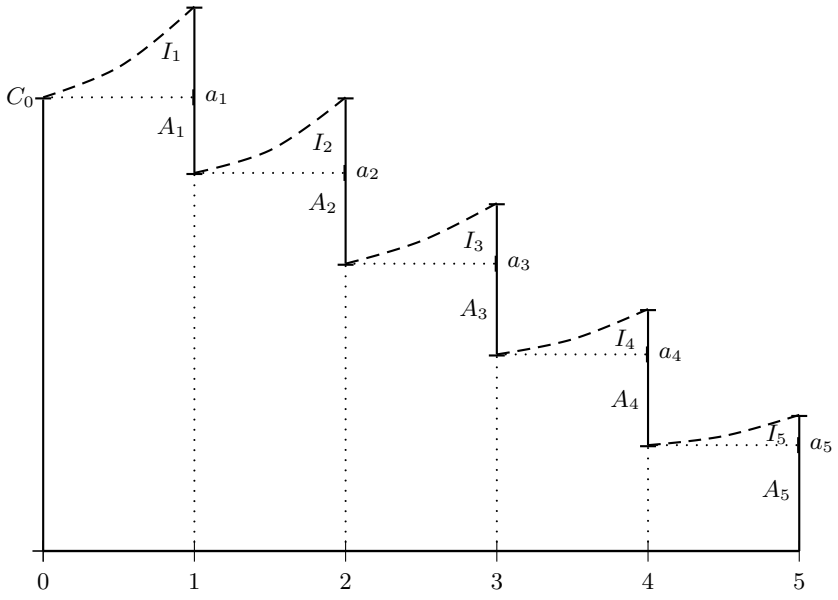


Figura 7.3: Amortización del préstamo francés

7.4.2. Capital pendiente

El *capital pendiente* o *reserva matemática*, puede obtenerse por:

Método retrospectivo: Diferencia entre el importe del préstamo y las anualidades pagadas o vencidas:

$$C_s = C_0(1+i)^s - a\, s_{\overline{s}|i} \tag{7.14}$$

Método prospectivo: El capital pendiente es el valor actual de las anualidades pendientes de pago o futuras:

$$C_s = a\, a_{\overline{n-s}|i} \tag{7.15}$$

Método recurrente: Se calcula como diferencia entre reserva matemática y la anualidad correspondiente:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a \tag{7.16}$$

7.4.3. Cuotas de amortización

Las *cuotas de amortización* varían en progresión geométrica de razón $(1+i)$.

$$\begin{array}{ll} \text{En } s: & C_s = C_{s-1}(1+i) - a \\ \text{En } s+1: & C_{s+1} = C_s(1+i) - a \\ \underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = & \underbrace{(C_{s+1} - C_s)}_{A_s}(1+i) \end{array}$$

por tanto,

$$\begin{array}{l} A_{s+1} = A_s(1+i) \\ A_{s+1} = A_1(1+i)^s \\ A_s = A_1(1+i)^{s-1} \end{array}$$

A través de la anualidad,

$$a = A_1 + I_1 \qquad I_1 = C_0\, i \qquad A_1 = a - C_0\, i$$

A través de C_0,

$$C_0 = A_1 \underbrace{(1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1})}_{s_{\overline{n}|i}} = A_1\, s_{\overline{n}|i}$$

Despejando A_1,

$$A_1 = \frac{C_0}{s_{\overline{n}|i}} \tag{7.17}$$

7.4.4. Capital amortizado, cuotas de interés

El *capital amortizado* viene determinado por la suma de las cuotas de amortización practicadas hasta ese momento:

$$M_s = A_1 + A_2 + \cdots + A_s = \sum_{h=1}^{s} A_h$$

$$M_s = A_1 + A_1(1+i) + A_1(1+i)^2 + \cdots + A_1(1+i)^{s-1} = A_1\, s_{\overline{s}|i} = C_0 \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}$$

$$M_s = C_0 \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \tag{7.18}$$

Del mismo modo, también puede obtenerse el capital amortizado como,

$$M_s = C_0 - C_s$$

La *cuota de interés* se obtiene como diferencia:

$$I_s = a - A_s$$

o por el producto:

$$I_s = C_{s-1}\, i \tag{7.19}$$

7.4.5. El cuadro de amortización

Resulta útil recoger en un cuadro el proceso de amortización de un capital, reflejando de forma clara y concisa el valor que toman las principales magnitudes en los diversos vencimientos de la operación.

La denominación será la de cuadro de amortización, y en él vamos a hacer figurar los valores de los términos amortizativos a_s, las cuotas de interés $I_s = C_{s-1}\, i_s$ y las cuotas de amortización A_s correspondientes a cada uno de los períodos n, así como las cuantías del capital amortizado M_s y del capital vivo o pendiente C_s referidos.

El cálculo del cuadro de amortización se realiza de la siguiente forma:

Per n	Término a	Intereses I_s	Amortizado A_s	Acumulado M_s	Pendiente C_s
0					C_0
1	$a = \dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\rceil i}}$	$I_1 = C_0\, i$	$A_1 = a - I_1$	$M_1 = A_1$	$C_1 = C_0 - M_1$
2	$a = \dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\rceil i}}$	$I_2 = C_1\, i$	$A_2 = a - I_2$	$M_2 = M_1 + A_2$	$C_2 = C_0 - M_2$
⋮					
s	$a = \dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\rceil i}}$	$I_s = C_{s-1}\, i$	$A_s = a - I_s$	$M_s = M_{s-1} + A_s$	$C_s = C_0 - M_s$
⋮					
n	$a = \dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\rceil i}}$	$I_n = C_{n-1}\, i$	$A_n = a - I_n$ $A_n = C_{n-1}$	$M_n = M_{n-1} + A_n$ $M_n = C_0$	$C_n = C_0 - M_n$ $C_n = 0$

Ejemplo 7.6 Se solicita un préstamo hipotecario de 50 000 € a pagar en 30 años mediante cuotas mensuales y a una tasa de interés nominal anual del 9 %, determinar:

- la cuantía de los términos amortizativos (mensualidad),
- cuadro de amortización de los 4 primeros términos,
- intereses pagados en el término 240,
- capital amortizado en los 5 primeros años.

Para la obtención del término amortizativo,

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n\ m}\rceil i\ m}} \qquad a = \frac{50\,000}{a_{\overline{360}\rceil 0\,,0075}} = 402,31$$

Con la calculadora financiera, a

30 [g] [12×] 9 [g] [12÷] 50000 [PV] [PMT] obteniendo $-402,31$

La confección del cuadro, la realizamos siguiendo el modelo,

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					50 000,00
1	402,31	375,00	27,31	27,31	49 972,69
2	402,31	374,80	27,51	54,82	49 945,18
3	402,31	374,59	27,72	82,54	49 917,46
4	402,31	374,38	27,93	110,47	49 889,53
$\vdots$					

Para obtener el cuadro con la calculadora,

1 [f] [AMORT] obteniendo -375 de intereses [x≤y] $-27,31$ y así sucesivamente.

Los intereses pagados en el término 240, obteniéndolos por el método retrospectivo,

$$I_s = C_{s-1}\, i \qquad I_{240} = C_{239}\, i$$

$$C_s = C_0(1+i)^s - a\, s_{\overline{s}|i} \qquad C_{239} = 50\,000\,(1+0,0075)^{239} - 402,31\, s_{\overline{239}|0\,,0075}$$

$$C_{239} = 31\,922,90 \qquad I_{240} = 31\,922,90 \cdot 0,0075 = 239,42$$

Con la calculadora, I_{240}

239 [f] [AMORT] 1 [f] [AMORT] obteniendo $-239,42$

El capital amortizado en los primeros 5 años, es:

$$M_{60} = C_0 - C_{60} \qquad C_{60} = 50\,000\,(1+0,0075)^{60} - 402,31\, s_{\overline{60}|0\,,0075}$$

$$M_{60} = 50\,000 - 47\,940,17 = 2\,059,83$$

Con la calculadora, M_{60}

60 [f] [AMORT] [x≤y] obteniendo 2 059,83

■

7.5. Tanto efectivo para el prestatario

El prestatario recibe un efectivo C_0 menor que la cantidad nominal C entregada por el prestamista, ya que toda operación de préstamo genera unos gastos iniciales G_0 de notario, comisiones, etc. normalmente a cargo del tomador del préstamo o prestatario.

De otra parte, el prestatario se compromete a entregar el nominal del préstamo C junto con los intereses mediante pagos a lo largo de la duración n del préstamo. Si suponemos que el pago de estos términos se realiza a través de una institución financiera que cobra una cantidad g, en concepto de comisión por la gestión de pago realizada surgen así unos gastos adicionales que tienen el carácter de periódicos.

Analizando globalmente la operación financiera, el prestatario recibe $C_0 = C - G_0$, que devuelve mediante la contraprestación de los términos a que tienen un costo superior al añadir los gastos $a\,(1+g)$. De este modo, la equivalencia financiera será en general:

$$C_0 - G_0 = \sum_{i=1}^{n} a\,(1+i)^{-n}$$

y para términos constantes,

$$C_0 - G_0 = a\,(1+g)a_{\overline{n}|i} \tag{7.20}$$

expresión que permite encontrar el tipo de interés efectivo para el prestatario y que indica el coste financiero real de la operación. ■

Para su cálculo, podemos emplear cualquiera de los métodos vistos en (6.7) en la página 86.

Ejemplo 7.7 Una empresa solicita un préstamo de una entidad financiera por importe de 50 000 € que se compromete a reembolsar mediante cuotas anuales pospagables durante 3 años a un interés del 5 % revisable anualmente. Los gastos de formalización ascienden al 2 % del nominal de la deuda. Para el siguiente año, el interés revisado es del 4,75 %

Para obtener el término amortizativo inicial:

$$50\,000 = a\, a_{\overline{3}|0\,,05} \qquad a = 18\,360,43$$

El interés efectivo para el prestatario, deducidos los gastos:[1]

$$G_0 = 0,02 \cdot 50\,000 = 1\,000$$

$$50\,000 - 1\,000 = 18\,360,43\, a_{\overline{3}|i} \qquad i = 0,060856$$

El cuadro, lo realizamos considerando el neto percibido y los términos a reembolsar:

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					49 000,00
1	18 360,43	2 981,96	15 378,47	15 378,47	33 621,53
2	18 360,43	2 046,08	16 314,35	31 692,82	17 307,18
3	18 360,43	1 053,25	17 307,18	49 000,00	

La contabilización a la formalización del préstamo:[2]

49 000,00	(57)	Tesorería	a	(170)	Deudas a largo plazo con entidades de crédito	33 621,53
			a	(5200)	Préstamos a corto plazo con entidades de crédito	15 378,47

Al vencimiento del primer pago:

2 981,96	(662)	Intereses de deudas				
15 378,47	(5200)	Préstamos a corto plazo de entidades de crédito	a	(57)	Tesorería	18 360,43

El capital pendiente tras la primera amortización:

$$C_s = a\, a_{\overline{n-s}|i} \qquad C_1 = 18\,360,43 = a\, a_{\overline{3-1}|0\,,05} \qquad C_2 = 34\,139,58$$

El nuevo término amortizativo, con i revisado sería:

$$34\,139,58 = a\, a_{\overline{2}|0\,,0475} \qquad a = 18\,295,41$$

y, el interés efectivo:

$$33\,621,53 = 18\,295,41\, a_{\overline{2}|i} \qquad i = 0,058326$$

El nuevo cuadro de amortización:

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
1					33 621,53
2	18 295,41	1 961,01	16 334,40	16 334,40	17 287,12
3	18 295,41	1 008,29	17 287,12	33 621,53	

[1] En la determinación del tipo de interés efectivo se incluirán las comisiones financieras que se carguen por adelantado en la concesión de financiación y demás costes de transacción atribuibles.

[2] El reconocimiento de estas deudas se efectúa a la recepción del efectivo correspondiente. La valoración inicial de la obligación de pago se hace por el valor razonable que, en general, es el precio de la transacción, que equivale al valor razonable de la contraprestación recibida ajustado por los costes de transacción que le sean directamente atribuibles.

La reclasificación tras el pago del primer período sería:

16 334,40	(170)	Deudas a largo plazo con entidades de crédito	a	(5200)	Préstamos a corto plazo de entidades de crédito	16 334,40

Al vencimiento del segundo pago:

1 961,01	(662)	Intereses de deudas				
16 334,40	(5200)	Préstamos a corto plazo de entidades de crédito	a	(57)	Tesorería	18 295,41

17 287,12	(170)	Deudas a largo plazo con entidades de crédito	a	(5200)	Préstamos a corto plazo de entidades de crédito	17 287,12

7.6. Amortización con términos variables en progresión geométrica

Se trata de amortizar un capital de cuantía C_0 mediante n términos amortizativos que varían en progresión geométrica y, en consecuencia, se dará la relación:

$$a_s = a_{s-1}\, q = a_1\, q^{s-1}$$

siendo q la razón de la progresión, que necesariamente debe ser positiva para satisfacer la exigencia de que sea todo $a_s > 0$.

Deberá verificarse,

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a\, q^{s-1}(1+i)^{-s} = V_0(a,q)_{\overline{n}|i} = a\,\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

y por tanto,

$$a = C_0\,\frac{1+i-q}{1-q^n(1+i)^{-n}} > 0 \tag{7.21}$$

La reserva o saldo al principio del año $s+1$,

$$C_s = V_0(a_{s+1},q)_{\overline{n-s}|i} = a_{s+1}\frac{1-(1+i)^{-(n-s)}\,q^{n-s}}{1+i-q} \tag{7.22}$$

o bien,

$$C_s = C_{s-1}\,(1+i) - a_s$$

El resto de magnitudes, las obtenemos de la misma forma que en el método francés.

Ejemplo 7.8 Determinar el primer término de amortización de cada uno de los 5 primeros años, de un préstamo de 50 000 € a 30 años y el 12,5 %. Los pagos, tienen un incremento anual del 5 % para los primeros 5 años y son constantes para el resto.

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = C\,\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \qquad i = \left(1+\frac{0,125}{12}\right)^{12} - 1 = 0,132416$$

$$50\,000 = C\frac{1-1,05^5(1+0,132416)^{-5}}{1+0,132416-1,05} + C\,1,05^5\,a_{\overline{25}|0\,,132416}(1+0,132416)^{-5}$$

$$50\,000 = 3,817748\,C + 4,944667\,C \qquad C = 5\,706,19 \text{ (anual)}$$

$$i^{(12)} = \frac{0,125}{12} = 0,01047 \qquad 5\,706,19 = C\,s_{\overline{12}|0\,,010417} \qquad C_1 = 448,88$$

$$C_2 = 448,88\cdot 1,05 \qquad C_2 = 471,32$$
$$C_3 = 471,32\cdot 1,05 \qquad C_3 = 494,89$$
$$C_4 = 494,89\cdot 1,05 \qquad C_4 = 519,63$$
$$C_5 = 519,63\cdot 1,05 \qquad C_5 = 545,62$$

7.7. Amortización con términos variables en progresión aritmética

Este sistema plantea la amortización de un capital C_0 mediante términos amortizativos a variables en progresión aritmética de razón d y rédito periodal constante, pudiendo ser la razón d positiva o negativa, si bien en este segundo caso, para evitar términos negativos, deberá verificarse:

$$a + (n-1)d = a_n > 0$$

La equivalencia en el origen, debe cumplir:

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n} \left[a + (s-1)d\right](1+i)^{-s} = V_0(a,d)_{\overline{n}|i} = \left(a + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d\,n\,(1+i)^{-n}}{i} \tag{7.23}$$

y, el valor del primer término

$$a = \frac{C_0\,i + d\,n}{i\,a_{\overline{n}|i}} - \frac{d}{i} - d\,n \tag{7.24}$$

obteniéndose los restantes valores por la relación $a_s = a_{s-1} + d$. Si el valor de d resulta desconocido, podría obtenerse a partir de:

$$d = \frac{C_0 - a\,a_{\overline{n}|i}}{\dfrac{1+i\,n}{i} a_{\overline{n}|i} - \dfrac{n}{i}}$$

y la reserva o saldo,

$$\begin{aligned} C_s = V_0(a_{s+1},d)_{\overline{n-s}|i} &= \left[a_{s+1} + \frac{d}{i} + d\,(n-s)\right] a_{\overline{n-s}|i} - \frac{d\,(n-s)}{i} \\ &= \left(a + \frac{d}{i} + d\,n\right) a_{\overline{n-s}|i} - \frac{d\,(n-s)}{i} = \left(C_0 + \frac{d\,n}{i}\right) \frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{d\,(n-s)}{i} \end{aligned} \tag{7.25}$$

y el capital amortizado y las cuotas de interés los obtendremos como:

$$M_s = C_0 - C_s \qquad\qquad I_s = a_s - A_s = C_{s-1}\,i$$

7.8. Amortización de cuota de capital constante. Método italiano

Este caso particular, justificado fundamentalmente por su sencillez, nace al exigir que:

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$$

y por tanto,

$$C_0 = \sum_{h=1}^{n} A_h = n\,A$$

resultando,

$$A = \frac{C_0}{n} \tag{7.26}$$

En consecuencia, el capital vivo disminuye en progresión aritmética de razón $A = \dfrac{C_0}{n}$.

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r = (n-s)\,A = C_{s-1} - A$$

y el capital amortizado, crece según la misma progresión:

$$M_s = \sum_{r=1}^{s} A_r = s\,A = M_{s-1} + A$$

Los términos amortizativos, son de la forma:

$$a_s = I_s + A = C_{s-1}\,i_s + A \tag{7.27}$$

Ejemplo 7.9 Determinar la anualidad y cuota de amortización primera de un capital de 480 000 € que se amortiza en 6 años por el método de cuotas anuales constantes a un tipo de interés del 9 %.

$$A = \frac{C_0}{n} = \frac{480\,000}{6} = 80\,000$$

Sabiendo que, $I_{s+1} = C_s\,i$,

$$I_1 = C_0\,i \qquad\qquad I_1 = 480\,000 \cdot 0,09 = 43\,200$$

y por tanto,

$$a_1 = A_1 + I_1 \qquad\qquad a_1 = 80\,000 + 43\,200 = 123\,200$$

7.9. Préstamo alemán o «anticipativenzisen»

Se designa con este nombre a la operación de amortización con intereses prepagables, mediante términos amortizativos constantes $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, siendo el rédito de capitalización i_s^* constante para todos los períodos $i_s^* = i^*$. También se conoce este caso particular como método de la Europa central o centroeuropeo.

En esta operación, el prestatario, a cambio de la prestación, paga en el momento de concertar el préstamo los intereses que devenga durante el primer período y, además, al término de cada período, un término amortizativo, que comprende la cuota de amortización del período y la cuota de intereses del período siguiente sobre el capital vivo.

Si relacionamos i^* como interés anticipado con i, tal como vimos en (2.6) en la página 10,

$$i^* = \frac{i}{1+i} \qquad\qquad i = \frac{i^*}{1-i^*}$$

La ecuación de equivalencia en el origen C_0^* con el capital nominal, es:

$$C_0^* = a \sum_{s=1}^{n} (1-i^*)^{s-1} = a\,\frac{1-(1-i^*)^n}{i^*} = a\,a^*_{\overline{n}|i^*}$$

sustituyendo i^* en función de i, $i = \dfrac{i^*}{1-i^*}$,

$$C_0^* = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i) = a\,\ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

siendo $C_0^* = C_0\,(1-i^*)^{-1} = C_0\,(1+i)$, y por tanto,

$$a = \frac{C_0^*}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} \tag{7.28}$$

Para calcular la anualidad, basta despejar a obteniéndose:

$$a = C_0^*\,\frac{i^*}{1-(1-i^*)^n} = \frac{C_0^*}{a^*_{\overline{n}|i^*}} = \frac{C_0^*}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} \tag{7.29}$$

teniendo en cuenta que la primera anualidad coincide con los intereses, la equivalencia se presenta así:

$$C_0^* = C_0^*\, i^* + a\, a^*_{\overline{n}|i^*}$$

Esta primera cuantía $C_0^*\, i^*$ en concepto de intereses prepagables constituye un pago simbólico, ya que se deduce del capital nominal en el momento de la entrega.

Las cuotas de intereses,

$$I^*_{s+1} = C^*_s\, i^* = a - A^*_s \tag{7.30}$$

siendo,

$$a_s = A_s + I_s$$

de la que se sigue:

$$A^*_s = A^*_{s+1} - (C^*_s - C^*_{s+1})\, i^* = A^*_{s+1}(1-i^*) = A^*_n(1-i^*)^{n-s} = a\,(1-i^*)^{n-s} \tag{7.31}$$

fórmula que relaciona una cuota de amortización con sus posteriores. Al ser $A^*_n = a$, el cálculo de los restantes, es automático.

El capital vivo en un determinado momento s, es:

$$\begin{aligned} C^*_s &= \sum_{r=s+1}^{n} A^*_r = A^*_{s+1} + A^*_{s+2} + \cdots + A^*_{n-1} + A^*_n = \\ &= A^*_n(1-i^*)^{n-(s+1)} + A^*_n(1-i^*)^{n-(s+2)} + \cdots + A^*_n(1-i^*) + A^*_n = \\ &= A^*_n \frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{i^*} = a\,\frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{i^*} = C^*_0\,\frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{1-(1-i^*)^n} = \\ &= a\, a^*_{\overline{n-s}|i^*} = a\,\ddot{a}_{\overline{n-s}|i} \end{aligned} \tag{7.32}$$

y para el capital amortizado:

$$M^*_s = C^*_0 - C^*_s = C^*_0\left(1 - \frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{1-(1-i^*)^n}\right) = C^*_0\,\frac{s^*_{\overline{s}|i^*}}{s^*_{\overline{n}|i^*}} = C^*_0\,\frac{\ddot{s}_{\overline{s}|i}}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} \tag{7.33}$$

Ejemplo 7.10 En un préstamo alemán, de cuantía $C^*_0 = 750\,000$, $i^* = 0,10$ y 12 años de duración, determinar: la anualidad, cuota de amortización del cuarto año, cuota de intereses del séptimo y capital vivo al principio del cuarto año.

La anualidad,

$$a = 750\,000\,\frac{0,1}{1-(1-0,1)^{12}} = 104\,519,35$$

o también, utilizando el tipo i,

$$i = \frac{i^*}{1-i^*} = \frac{0,10}{1-0,10} = 0,111111$$

$$a = \frac{750\,000}{\dfrac{1-(1+0,111111)^{-12}}{0,111111}\,(1+0,111111)} = 104\,519,35$$

La cuota de amortización del cuarto año:

$$A^*_4 = 104\,519,35\,(1-0,10)^{12-4} = 44\,992,15$$

Los intereses del séptimo año:

$$I^*_7 = C^*_6\, i^* \qquad\qquad C^*_6 = a\,\frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{i^*}$$

$$I^*_7 = 104\,519,35\,\frac{1-(1-0,10)^{12-6}}{0,10}\,0,10 = 48\,973,48$$

El capital vivo al principio del cuarto año:

$$C_4^* = 104\,519,35\,\frac{1-(1-0,10)^{12-4}}{0,10} = 595\,271,97$$

o también

$$C_4^* = 104\,519,35\,\frac{1-(1+0,111111)^{-(12-4)}}{0,111111}\,(1+0,111111) = 595\,271,97$$

7.10. Amortización con intereses fraccionados

La operación de amortización consta de una prestación única C_0 y una contraprestación múltiple formada por n términos amortizativos.

El fraccionamiento de intereses consiste en dividir cada uno de los intervalos de n en m subperíodos, sustituyendo en este caso la correspondiente cuota de intereses I_s con vencimiento en s por las m cuotas de interés con vencimiento al final de cada uno de los respectivos subperíodos de m, siendo $i^{(m)}$ el rédito correspondiente al subperíodo. En consecuencia, cada término a_s, queda sustituido por el conjunto de m términos $a_{s\,m}$.

Se trata en realidad de la amortización de C_0 mediante $n\,m$ términos amortizativos, de tal forma que es nula la cuota de amortización de todos los términos que ocupan un lugar no múltiplo de m.

Para la obtención del cuadro de amortización con fraccionamiento en el pago de los intereses, el número de filas se multiplicará por m para recoger la situación de cada una de las variables en los nuevos puntos de vencimiento. ■

7.11. Carencia e interés variable

7.11.1. Carencia

El período de carencia t constituye un tiempo en el que no se produce la amortización del préstamo.

La carencia puede ser total, período en el cual no se abona ninguna cantidad y los intereses que se generan se suman al capital para amortizarse al final de la misma. En este caso, la deuda se ve incrementada por los intereses capitalizados al tipo correspondiente.

$$C_0' = C_0\,(1+i)^t$$

En la carencia parcial, más habitual, se abonan solo los intereses durante el período de la misma.

Al finalizar el período de carencia, el préstamo se amortiza con normalidad según el método acordado. El valor de la deuda al final de la carencia se mantiene.

$$C_0' = C_0$$

7.11.2. Tipo de interés variable

En el mercado de préstamos, conocido también como «*lending*» existen operaciones a tipo fijo, si bien lo habitual es que el tipo de interés sea variable, revisable o una combinación de ambos.

En estos préstamos, las entidades suelen fijar el tipo de interés sobre un índice financiero (el Euribor, IRPH, etc.) que denominamos i_b al que se le suma un diferencial *spread* i_s que varía entre entidades y clientes y fijan una fecha periódica (anual o semestral) de revisión del tipo de interés.

$$i = i_b + i_s$$

En consecuencia, hablaremos de $i, i', i'', \cdots, i^k$ como diferentes tipos de interés aplicables a la operación financiera.

En la operación a tipo variable, se marcan fechas de revisión (anual, semestral, etc.) en las que el tipo de interés aplicable se ajusta con el nuevo i_b publicado en el mercado. Con el nuevo tipo resultante, a partir del capital pendiente C_s a la fecha se rehace el cuadro de amortización, calculando la nueva cuota.

En el momento s, el nuevo término amortizativo a', sería:

$$C_s = a_{s+1}(1+i)^{-1} + a_{s+2}(1+i)^{-2} + \cdots + a_n(1+i)^{-n+s} = \sum_{h=s+1}^{n} a_h(1+i)^{-h+s}$$

$$C_s = \sum_{h=s+1}^{n} a'_h(1+i)^{-h+s} \tag{7.34}$$

■

Elegir entre un préstamo a tipo fijo o variable depende del perfil del tomador y de su capacidad para negociar, aunque en determinados casos las condiciones vienen impuestas y no son negociables.

Una segunda opción podría ser mantener el término amortizativo constante, pero aumentar o disminuir el número de períodos. En este caso, obtendríamos el número de períodos de la expresión anterior.

7.12. Valor financiero del préstamo, del usufructo y de la nuda propiedad

En una operación de amortización de prestación y contraprestación en base a una ley financiera, puede establecerse en un momento s la conveniencia o no de una rescisión anticipada de la operación o transferencia a terceras personas de los derechos u obligaciones futuras.

En base a esto, definimos el *valor financiero del préstamo* en un determinado punto s como el valor actualizado de los términos futuros calculado con una ley financiera externa.

El valor financiero en s de cada uno de estos derechos parciales, en base a la nueva ley de valoración recibe el nombre de *valor financiero del usufructo* y *valor financiero de la nuda propiedad*.

El valor financiero del usufructo, $\mathcal{U}_s$, es el valor actual de los intereses pendientes I_r al nuevo tipo de interés de mercado i'_h,

$$\mathcal{U}_s = \frac{I_{r-1}}{(1+i'_h)} + \frac{I_{r-2}}{(1+i'_h)^2} + \cdots + \frac{I_r}{(1+i'_h)^{n-r}} = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{I_r}{(1+i'_h)^{r-s}}$$

$$\mathcal{U}_s = \sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1}\, i_r \prod_{n=s+1}^{r} (1+i'_h)^{-1}$$

El valor financiero de la nuda propiedad, $\mathcal{N}_s$, es el resultado de actualizar al tanto de mercado i'_h todas las cuotas de amortizaciíon A_r pendientes,

$$\mathcal{N}_s = \frac{A_{r-1}}{(1+i'_h)} + \frac{A_{r-2}}{(1+i'_h)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(1+i'_h)^{n-r}} = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{A_r}{(1+i'_h)^{r-s}}$$

$$\mathcal{N}_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r \prod_{n=s+1}^{r} (1+i'_h)^{-1}$$

siendo el valor financiero del préstamo o pleno dominio, la suma de los valores financieros del usufructo y de la nuda propiedad, esto es: $a_r = I_r + A_r$,

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s$$

que representa la cantidad que el deudor tendrá que pagar para cancelar la deuda o, desde el punto de vista del prestamista, lo que debería recibir por transferir los derechos futuros que el préstamo supone en las condiciones actuales del mercado.

7.12.1. Caso particular. La fórmula de Achard

Si los réditos periodales de la operación son constantes e iguales respectivamente a i e i', las expresiones del capital vivo, valor del préstamo, usufructo y nuda propiedad en s, serían:

La cuantía del capital vivo,

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i)^{-(r-s)}$$

el valor financiero del préstamo,

$$\mathcal{V}_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i')^{-(r-s)}$$

el valor financiero del usufructo,

$$\mathcal{U}_s = \sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1}\, i (1+i')^{-(r-s)}$$

y el valor financiero de la nuda propiedad,

$$\mathcal{N}_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r (1+i')^{-(r-s)}$$

En estas condiciones, el valor de $\mathcal{V}_s$ y $\mathcal{N}_s$ verifican la siguiente relación:

$$\mathcal{U}_s = \frac{i}{i'}\big[C_s - \mathcal{N}_s\big] \tag{7.35}$$

denominada *fórmula de Achard*.

La fórmula de Achard permite plantear un sistema de dos ecuaciones lineales que relacionan los cuatro valores básicos:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_s &=& \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s \\ \mathcal{U}_s &=& \dfrac{i}{i'}\big[C_s - \mathcal{N}_s\big] \end{array}\right\} \tag{7.36}$$

Al sustituir la segunda ecuación en la primera:

$$\mathcal{V}_s = \frac{i}{i'}\left[C_s - \mathcal{N}_s\right] + \mathcal{N}_s \tag{7.37}$$

conocida como *fórmula de Makeham.*

7.12.2. Aplicación a los métodos de amortización más utilizados

Préstamo americano

En base a la fórmula de Achard y Makeham pueden obtenerse los valores:

$$C_s = C_0$$

$$\mathcal{N}_s = C_0(1+i')^{-(n-s)}$$

$$\mathcal{U}_s = C_0\, i\, a_{\overline{n-s}|i'} = \frac{i}{i'}\left[C_0 - \mathcal{N}_s\right]$$

$$\mathcal{V}_s = C_0\, i\, a_{\overline{n-s}|i'} + C_0(1+i')^{-(n-s)}$$

Préstamo francés

En este caso,

$$C_s = a\, a_{\overline{n-s}|i}$$

$$\mathcal{V}_s = a\, a_{\overline{n-s}|i'}$$

y a través del sistema (7.35) se determinarán $\mathcal{U}_s$ y $\mathcal{N}_s$

$$\mathcal{U}_s = \frac{i\left(\mathcal{V}_s - C_s\right)}{i - i'} = \frac{i\, a\left(a_{\overline{n-s}|i'} - a_{\overline{n-s}|i}\right)}{i - i'}$$

si despejamos $\mathcal{N}_s$,

$$\mathcal{N}_s = \frac{i\, C_s - i'\, \mathcal{V}_s}{i - i'} = \frac{a\left(i\, a_{\overline{n-s}|i} - i'\, a_{\overline{n-s)}|i'}\right)}{i - i'}$$

Préstamo con cuota de amortización constante

Por ser $A_s = A = \dfrac{C_0}{n}$ para todo s,

$$C_s = (n-s)\, A$$

y

$$\mathcal{N}_s = A\, a_{\overline{n-s}|i'}$$

Aplicando la fórmula de Achard, se obtiene $\mathcal{U}_s$

$$\mathcal{U}_s = \frac{i}{i'}\left[(n-s)\, A - A\, a_{\overline{n-s}|i'}\right] = A\, \frac{i}{i'}\left[(n-s) - a_{\overline{n-s}|i'}\right]$$

y

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s$$

Ejemplo 7.11 Se concede un préstamo de 100 000 € para ser amortizado en 10 años al 5 %. Si al inicio del quinto año el tipo de interés del mercado es del 7 %, determinar el valor del préstamo, del usufructo y de la nuda propiedad en los supuestos de que se haya aplicado el método de amortización americano, francés o de cuota de amortización constante.

Método americano,

$$C_4 = C_0 = 100\,000$$
$$\mathcal{U}_4 = 100\,000 \cdot 0,05 \cdot a_{\overline{10-4}|0,07}$$
$$\mathcal{U}_4 = 100\,000 \cdot 0,05 \cdot 4,766540 = 23\,832,70$$
$$\mathcal{N}_4 = C_0(1+0,07)^{-(10-4)} = 66\,634,22$$
$$\mathcal{V}_4 = \mathcal{U}_4 + \mathcal{N}_4 = 23\,832,70 + 66\,634,22 = 90\,466,92$$

Método francés,

$$100\,000 = a\, a_{\overline{10}|0,05} \qquad a = 12\,950,46$$
$$C_4 = 12\,950,46\, a_{\overline{10-4}|0,05} = 65\,732,55$$
$$\mathcal{V}_4 = 12\,950,46\, a_{\overline{10-4}|0,07} = 61\,728,88$$
$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_s & = & \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s \\ \mathcal{U}_s & = & \dfrac{i}{i'}\left[C_s - \mathcal{N}_s\right] \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{rcl} 61\,728,88 & = & \mathcal{U}_4 + \mathcal{N}_4 \\ \mathcal{U}_4 & = & \dfrac{0,05}{0,07}\left[65\,732,55 - \mathcal{N}_4\right] \end{array}\right\}$$
$$\frac{61\,728,88 - 46\,951,82}{0,285714} = \mathcal{N}_4 = 51\,719,71$$
$$61\,728,88 - 51\,719,71 = \mathcal{U}_4 = 10\,009,17$$

Método de cuota de amortización constante,

$$C_4 = (10-4)\frac{100\,000}{10} = 60\,000$$
$$\mathcal{N}_4 = 10\,000\, a_{\overline{10-4}|0,07} = 47\,665,40$$
$$\mathcal{U}_4 = \frac{0,05}{0,07}\left[6 \cdot 10\,000 - 10\,000\, a_{\overline{10-4}|0,07}\right] = \frac{0,05}{0,07}\left[60\,000 - 47\,665,40\right] = 8\,810,43$$
$$\mathcal{V}_4 = \mathcal{U}_4 + \mathcal{N}_4 = 8\,810,43 + 47\,665,40 = 56\,475,83$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.1 Determinar las aportaciones constantes prepagables de una operación de constitución cuyas características son: cuantía del capital a formar 200 000 €, duración de la operación, 28 años y tipo de interés anual concertado del 6 %. Construir el cuadro correspondiente a los 4 primeros años.

Solución: 2 753, 31

Ejercicio 7.2 Si se pretende formar un capital de 300 000 € mediante imposiciones constantes al principio de cada trimestre, con un interés anual del 4,50 % y durante 30 años, determinar:

1. Cuantía de la imposición constante,
2. Capital constituido después de 20 imposiciones,
3. Cuota de constitución del décimo trimestre,
4. Intereses formados en el sexto período.

Solución: 1) 1 179, 95 2) 26 595, 70 3) 1 319, 62 4) 81, 92

Ejercicio 7.3 Un préstamo de 10 000 € que se amortiza mediante reembolso único a los 8 años a un interés del 6 %, es reembolsado en parte por entrega del prestatario a los 4 años por 5 000 €. Determinar el saldo acreedor al vencimiento del mismo en los siguientes casos:

1. El acreedor acepta el mismo tipo de evaluación,
2. El tipo de interés del mercado, se modifica al 5 %

Solución: 1) 9 626, 10 2) 9 267, 96

Ejercicio 7.4 Un préstamo de 20 000 € amortizable mediante reembolso único a los 10 años, con un intereses anual al 12 %, quiere cancelarse a los 5 años. Se pide la cantidad que cancela el préstamo si el tipo vigente en el mercado en dicho momento es del 10 %.

Solución: $C_5 = 38\,569, 75$

Ejercicio 7.5 Se obtiene un préstamo de 10 000 € amortizable mediante reembolso único a los 10 años, con pago anual de intereses al 10 %. Si a los 4 años, después de pagar los intereses, el prestatario hace una entrega parcial de 2 500 €. Determinar el saldo en dicho momento, si el tanto de interés vigente en el mercado es del 8 %.

Solución: $C_4 = 8\,372, 88$

Ejercicio 7.6 ¿A qué tipo de interés se ha de prestar un capital C_0 para que en n años el valor de la contraprestación sea k veces el del préstamo? Aplicar el resultado para $k = 3$ y $n = 12$.

Solución: $i = k^{\frac{1}{n}} - 1$ $i = 0, 095873$

Ejercicio 7.7 Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 5 000 € pagadero en cinco plazos semestrales, siendo el tipo nominal de la operación del 10 % y las cuotas de amortización semestral constantes.

Ejercicio 7.8 Formar el cuadro de amortización de un préstamo de 10 000 € amortizable en 8 años, con abono de intereses al 10 % y amortizable mediante términos constantes.

Ejercicio 7.9 Se desea amortizar en 20 años un préstamo de 150 000 € mediante anualidades constantes, valorado al 5 % anual, se pide determinar:

1. La anualidad,
2. El capital amortizado después del pago de la octava anualidad,
3. Cuota de interés del año 10,
4. Cuota de amortización del año 14,
5. Deuda pendiente al comienzo del año 16.

Solución: 1) $a = 12\,036, 39$ 2) $M_8 = 43\,318, 46$
3) $I_{10} = 4\,998, 96$ 4) $A_{14} = 8\,554, 04$ 5) $C_{15} = 52\,111, 26$

Ejercicio 7.10 El banco concede un préstamo de 10 000 € al 5 %. Su amortización se hará mediante la entrega de 10 pagos anuales iguales, teniendo lugar el primero a los tres años de efectuado el préstamo. Determínese:

1. La anualidad,
2. Si el prestatario después de satisfecha la cuarta anualidad, pretende sustituir el resto del reembolso mediante una entrega única satisfecha dos años después, cuál sería la cuantía de esta entrega.

Solución: 1) $a = 1\,427,79$ 2) $C_s = 7\,989,82$

Ejercicio 7.11 Formar el cuadro de amortización por el método francés de un préstamo de 35 000 € concertado al 6,5 % a amortizar en siete años.

Ejercicio 7.12 Se concede un préstamo de 50 000 € para amortizarse por el método americano con fondo de amortización en cinco años al tipo de interés del 6,5 % anual.

El deudor concierta por otra parte un fondo de reconstitución, por la misma duración, a un tipo de interes del 5 % anual, comprometiéndose a depositar al final de cada año la cantidad constante necesaria para formar el principal percibido en préstamo. Determinar la cuantía de la misma.

Solución: $F = 9\,048,74$

Ejercicio 7.13 Una sociedad obtiene un préstamo de 20 000 €, que deberá amortizar mediante 6 anualidades vencidas, siendo el tipo de interés del 5 % para los primeros tres años y del 6 % para los restantes. Se pide confeccionar el cuadro de amortización.

Solución: $a_1 = 3\,940,35$ $a_4 = 4\,014,40$

Ejercicio 7.14 Se obtiene un préstamo de 40 000 €, al 6 %, se pide determinar el cuadro de amortización del mismo en los siguientes casos:

1. Operación contratada a 6 años, amortizable mediante anualidades constantes,
2. Operación contratada a 6 años, amortizable mediante cuotas constantes.

Ejercicio 7.15 Se recibe un préstamo hipotecario de 120 000 € que se tiene que devolver en 30 años mediante anualidades constantes, al tipo efectivo anual del 6 % y con una comisión de apertura del 1 %. Obtener:

1. Anualidad,
2. Cuotas de amortización del año 3 y 20,
3. Capital amortizado al final del año 12,
4. Cuotas de interés correspondientes al quinto y último año,
5. Capital pendiente al término del séptimo año,
6. Confecciona el cuadro de amortización correspondiente a los períodos 14 a 18,
7. Tanto efectivo para el prestatario.

Solución: 1) $a = 8\,717,87$ 2) $A_3 = 1\,705,48$ $A_{20} = 4\,592,46$
3) $M_{12} = 25\,606,37$ 4) $I_5 = 6\,801,59$ $I_{30} = 493,46$
5) $C_7 = 107\,259,25$ 7) $i = 6,09\,\%$

Ejercicio 7.16 Se concierta un préstamo a 20 años de 160 000 € con pagos mensuales iguales a un interés del 5 % nominal anual y un 1,25 % de gastos iniciales correspondientes a la apertura. Obtener:

1. Mensualidad,
2. Capital amortizado en los dos primeros años,
3. Cuota de interés correspondiente a la 8.ª mensualidad,
4. Capital pendiente una vez pagadas las mensualidades de los 10 primeros años,
5. Mensualidad del mes 14 en el supuesto de que el tipo de interés se haya modificado al 5,25 %,
6. Tanto efectivo para el prestatario.

Solución: 1) $a = 1\,055,93$ 2) $M_{24} = 9\,803,93$ 3) $I_8 = 655,17$
4) $C_{120} = 99\,554,38$ 5) $a' = 1\,077,16$ 6) $i = 5,274\,\%$

Ejercicio 7.17 ¿Cuál es la deuda al inicio del quinto año de un préstamo de 100 000 € a 5 años con pagos mensuales al 4 % de interés?

Solución: $C_{48} = 21\,628,33$

Ejercicio 7.18 Al solicitar un préstamo de 10 000 € a devolver en 3 años para la adquisición de un vehículo, recibimos la siguiente oferta: nos entregan 11 000 € a devolver 345 € mensuales. Determinar el tipo de interés nominal de la operación.

Solución: $J^{(12)} = 8,065\,\%$

Ejercicio 7.19 Para la compra de un vehículo, nos ofrecen la siguiente fórmula de financiación: entrada de 11 000 €, 48 mensualidades de 320 € y 25 000 € una vez finalizadas las mensualidades. La TAE aplicada a la operación es del 8,15 %. Determinar el valor actual o coste al contado del mismo.

Solución: $C_0 = 42\,417,04$

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 7.1

$$a = \frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} = \frac{200\,000}{\ddot{s}_{\overline{28}|0,06}} = 2\,753,31$$

$$I_1 = 2\,753,31 \cdot 0,06 = 165,20 \qquad \Delta_1 = 2\,653,31 + 165,20 = 2\,918,51$$

$$C_1 = 2\,918,51 \qquad K_1 = 200\,000 - 2\,918,51 = 197\,081,49$$

n	a	I_s	Δ_s	C_s	K_s
0					200 000,00
1	2 753,31	165,20	2 918,51	2 918,51	197 081,49
2	2 753,31	340,31	3 093,62	6 012,13	193 987,87
3	2 753,31	525,93	3 279,24	9 291,37	190 708,63
4	2 753,31	722,68	3 475,99	12 767,36	187 232,64

Solución ejercicio 7.2

1.

$$i^{(4)} = \frac{0,045}{4} = 0,01125 \qquad a = \frac{300\,000}{\ddot{s}_{\overline{120}|0,01125}} = 1\,179,95$$

2.

$$C_{20} = a\,\ddot{s}_{\overline{20}|0,011250} \qquad C_{20} = 1\,179,95\,\ddot{s}_{\overline{20}|0,01125} = 26\,595,70$$

3.

$$\Delta_{10} = a_{10} + I_{10} \qquad I_{10} = (C_9 + a)\,i \qquad C_9 = a\,\ddot{s}_{\overline{9}|0,01125}$$

$$C_9 = 1\,179,95\,\ddot{s}_{\overline{9}|0,01125} \qquad C_9 = 11\,235,22$$

$$I_{10} = (11\,235,22 + 1\,179,95)0,01125 = 139,67$$

$$\Delta_{10} = 1\,179,95 + 139,67 = 1\,319,62$$

o también,

$$\Delta_{10} = \Delta_1(1+i)^{s-1}$$

$$\Delta_{10} = 1\,179,95 \cdot 1,01125 = 1\,193,22(1+0,01125)^9 = 1\,319,62$$

4.

$$I_6 = (C_5 + a)\,i \qquad C_5 = a\,\ddot{s}_{\overline{5}|0,01125}$$

$$C_5 = 1\,179,95\,\ddot{s}_{\overline{5}|0,01125} = 6\,101,88$$

$$I_6 = (6\,101,88 + 1\,179,95)\,0,01125 = 81,92$$

Solución ejercicio 7.3

$$C_n = 10\,000(1+0,06)^4 = 12\,624,77$$

$$12\,624,77 - 5\,000 = 7\,624,72$$

$$C_n = 7\,624,77\,(1+0,06)^4 = 9\,626,10$$

$$C_n = 7\,624,77\,(1+0,05)^4 = 9\,267,96$$

Solución ejercicio 7.4

$$C_5 = 20\,000(1+0,12)^5 = 35\,246,83$$

$$V_5 = 35\,246,83\left(\frac{1+0,12}{1+0,10}\right)^{10-5} = 38\,569,75$$

Solución ejercicio 7.5

$$C_4 = 10\,000 - 2\,500 = 7\,500$$

$$V_4 = 7\,500\left(\frac{1+0,10}{1+0,08}\right)^{10-4} = 8\,372,88$$

Solución ejercicio 7.6

$$k\,C_0 = C_0(1+i)^n \qquad (i+i)^n = \frac{k\,C_0}{C_0}$$
$$(i+i)^n = k \qquad 1+i = k^{\frac{1}{n}} \qquad i = k^{\frac{1}{n}} - 1$$
$$i = 3^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i = 0,095873$$

Solución ejercicio 7.7

$$A_s = \frac{5\,000}{5} = 1\,000$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					5 000
1	1 250	250	1 000	1 000	4 000
2	1 200	200	1 000	2 000	3 000
3	1 150	150	1 000	3 000	2 000
4	1 100	100	1 000	4 000	1 000
5	1 050	50	1 000	5 000	0

Solución ejercicio 7.8

$$C_0 = a\,a_{\overline{n}|i} \qquad 10\,000 = a\,a_{\overline{8}|0,10} \qquad a = 1\,874,44$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					10 000,00
1	1 874,44	1 000,00	874,44	874,44	9 125,56
2	1 874,44	912,56	961,88	1 836,32	8 163,68
3	1 874,44	816,37	1 058,07	2 894,40	7 105,60
4	1 874,44	710,56	1 163,88	4 058,28	5 941,72
5	1 874,44	594,17	1 280,27	5 338,54	4 661,46
6	1 874,44	466,15	1 408,29	6 746,84	3 253,16
7	1 874,44	325,32	1 549,12	8 295,96	1 704,04
8	1 874,44	170,40	1 704,04	10 000,00	0,00

Solución ejercicio 7.9

1.
$$V_0 = a\,a_{\overline{n}|i} \qquad 150\,000 = a\,a_{\overline{20}|0,05} \qquad a = 12\,036,39$$

2.
$$M_8 = C_0 \frac{s_{\overline{8}|0,05}}{s_{\overline{20}|0,05}} \qquad M_8 = 150\,000\,\frac{9,549109}{33,065954} = 43\,318,46$$

3.
$$I_{10} = C_9\,i \qquad C_9 = a\,a_{\overline{n-s}|i} \qquad C_9 = 12\,036,39\,a_{\overline{20-9}|0,05}$$
$$I_{10} = 99\,979,24 \cdot 0,05 = 4\,998,96$$

4.
$$A_{14} = a - I_{14} \qquad I_{14} = C_{13}\,i \qquad C_{13} = a\,a_{\overline{n-s}|i}$$
$$C_{13} = 12\,036,39\,a_{\overline{20-13}|0,05} \qquad I_{14} = 69\,647,04 \cdot 0,05 = 3\,482,35$$
$$A_{14} = 12\,036,39 - 3\,482,35 = 8\,554,04$$

5.
$$C_{15} = a\,a_{\overline{n-s}|i} = 12\,036,39\,a_{\overline{20-15}|0,05}$$
$$C_{15} = 52\,111,26$$

Solución ejercicio 7.10

1.
$$10\,000 = a\,a_{\overline{10}|0,05}(1+0,05)^{-2} \qquad a = 1\,427,79$$

2.

$$C_4 = 1\,427,79\,a_{\overline{10-4}|0,05} \qquad C_4 = 7\,247,02$$
$$C_2 = 7\,247,02(1+0,05)^2 = 7\,989,84$$

Solución ejercicio 7.11

$$C_0 = a\,a_{\overline{n}|i} \qquad 35\,000 = a\,a_{\overline{7}|0,065} \qquad a = 6\,381,60$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					35 000,00
1	6 381,60	2 275,00	4 106,60	4 106,60	30 893,40
2	6 381,60	2 008,07	4 373,53	8 480,13	26 519,87
3	6 381,60	1 723,79	4 657,81	13 137,94	21 862,07

Solución ejercicio 7.12

$$C_n = 50\,000\,(1+0,065)^5 = 68\,504,33$$
$$F = \frac{50\,000}{s_{\overline{5}|0,05}} = 9\,048,74$$

Solución ejercicio 7.13

$$20\,000 = a\,a_{\overline{6}|0,05} \qquad a = 3\,940,35$$
$$C_3 = 3\,940,35\,a_{\overline{6-3}|0,05} \qquad C_3 = 10\,730,55$$
$$10\,730,55 = a\,a_{\overline{3}|0,06} \qquad a = 4\,014,40$$

Solución ejercicio 7.14

$$C_0 = a\,a_{\overline{n}|i} \qquad 40\,000 = a\,a_{\overline{6}|0,06} \qquad a = 8\,134,51$$
$$I_1 = C_0\,i \qquad I_1 = 40\,000 \cdot 0,06 \qquad I_1 = 2\,400$$
$$A_1 = a - I_1 \qquad A_1 = 8\,134,51 - 2\,400 \qquad A_1 = 5\,734,51$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					40 000,00
1	8 134,51	2 400,00	5 734,51	5 734,51	34 265,49
2	8 134,51	2 055,93	6 078,58	11 813,09	28 186,92
3	8 134,51	1 691,22	6 443,29	18 256,38	21 743,63

$$A = \frac{40\,000}{6} \qquad A = 6\,666,67$$
$$I_1 = C_0\,i \qquad I_1 = 40\,000 \cdot 0,06 \qquad I_1 = 2\,400$$
$$a_1 = A + I_1 \qquad a_1 = 6\,666,67 + 2\,400 \qquad a_1 = 9\,066,67$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					40 000,00
1	9 066,67	2 400,00	6 666,67	6 666,67	33 333,33
2	8 666,67	2 000,00	6 666,67	13 333,33	26 666,67
3	8 266,67	1 600,00	6 666,67	19 999,98	19 999,99

Solución ejercicio 7.15

1.

$$120\,000 = a\,a_{\overline{30}|0,06} \qquad a = 8\,717,87$$

2.

$$A_3 = a - I_3 \qquad I_3 = C_2\,i \qquad C_2 = a\,a_{\overline{30-2}|0,06}$$
$$C_2 = 8\,717,87\,a_{\overline{28}|0,06} \qquad C_2 = 116\,873,20$$
$$I_3 = 116\,873,20 \cdot 0,06 \qquad I_3 = 7\,012,39$$
$$A_3 = 8\,717,87 - 7\,012,39 = 1\,705,48$$
$$A_{20} = \cdots = 4\,592,46$$

3.

$$M_{12} = C_0 \frac{s_{\overline{12}|0,06}}{s_{\overline{30}|0,06}}$$
$$M_{12} = 120\,000 \frac{16,869941}{79,058186} \qquad M_{12} = 25\,606,37$$

4.

$$I_5 = C_4\, i \qquad C_4 = a\, a_{\overline{30-4}|0,06}$$
$$C_4 = 8\,717,87\, a_{\overline{26}|0,06} \qquad C_4 = 113\,359,91$$
$$I_5 = 113\,359,91 \cdot 0,06 = 6\,801,59$$
$$I_{30} = \cdots = 493,46$$

5.

$$C_7 = a\, a_{\overline{30-7}|0,06} \qquad C_7 = 107\,259,25$$

6. El cuadro,

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
13					91 339,38
14	8 717,87	5 480,36	3 237,51	31 898,13	88 101,87
15	8 717,87	5 286,11	3 431,76	35 329,88	84 670,12
16	8 717,87	5 080,21	3 637,66	38 967,54	81 032,46
17	8 717,87	4 861,95	3 855,92	42 823,47	77 176,53
18	8 717,87	4 630,59	4 087,28	46 910,74	73 089,26

7.

$$120\,000 - 1\,200 = 8\,717,87\, a_{\overline{30}|i} \qquad \frac{118\,800}{8\,717,87} = a_{\overline{30}|i} \qquad a_{\overline{30}|i} = 13,627182$$
$$a_{\overline{30}|0,06} = 13,764831 \qquad a_{\overline{30}|0,061} = 13,618790$$
$$\frac{x - 0,061}{0,06 - 0,061} = \frac{13,627182 - 13,618790}{13,764831 - 13,618790} \qquad \frac{x - 0,061}{-0,001} = 0,057463$$
$$x = (0,057463 \cdot -0,001) + 0,061 \qquad x = 0,060943$$

Solución ejercicio 7.16

1.

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}} \qquad a = \frac{160\,000}{a_{\overline{240}|0,004167}} \qquad a = 1\,055,93$$

2.

$$M_{24} = \frac{s_{\overline{24}|0,004167}}{s_{\overline{240}|0,004167}}$$
$$M_{24} = 160\,000 \frac{25,185923}{411,033720} \qquad M_{24} = 9\,803,93$$

3.

$$I_8 = C_7\, i \qquad C_7 = a\, a_{\overline{240-7}|0,004167}$$
$$C_7 = 1\,055,93\, a_{\overline{233}|0,004167} \qquad C_7 = 157\,240,86$$
$$I_8 = 157\,240,86 \cdot 0,004167 = 655,17$$

4.

$$C_{120} = a\, a_{\overline{240-120}|0,004167}$$
$$C_{120} = 1\,055,93 \frac{1 - (1 + 0,004167)^{-120}}{0,004167} \qquad C_{120} = 99\,554,51$$

5.

$$C_{13} = a\, a_{\overline{240-13}|0,004167}$$
$$C_{13} = 1\,055,93 \frac{1 - (1 + 0,004167)^{-227}}{0,004167} \qquad C_{120} = 154\,811,13$$
$$a = \frac{154\,811,13}{a_{\overline{227}|0,004375}} \qquad a = 1\,077,16$$

6.

$$160\,000 - 0,0125 \cdot 160\,000 = 1\,055,93\, a_{\overline{240}|i}$$
$$a_{\overline{240}|i} = \frac{158\,000}{1\,055,93} = 149,631131$$
$$a_{\overline{240}|0,004167} = 151,525313 \qquad a_{\overline{240}|0,0043} = 149,515624$$
$$\frac{x - 0,004167}{0,0043 - 0,004167} = \frac{149,631131 - 151,525313}{149,515624 - 151,525313}$$
$$x = (0,942525 \cdot 0,000133) + 0,004167 \qquad x = 0,004292$$
$$i = (1 + 0,004292)^{12} - 1 \qquad i = 0,052742 \approx 5,274\,\%$$

Solución ejercicio 7.17

$$100\,000 = a\, a_{\overline{60}|0\,,003333} \qquad a = 1\,841,65$$
$$C_{48} = 1\,841,65\, a_{\overline{60-48}|0\,,003333} \qquad C_{48} = 21\,628,33$$

Solución ejercicio 7.18

$$11\,000 = 345\, a_{\overline{36}|i} \qquad a_{\overline{36}|i} = 31,884058$$
$$a_{\overline{36}|0\,,005} = 32,871016 \qquad a_{\overline{36}|0\,,007} = 31,724659$$
$$\frac{x - 0,005}{0,007 - 0,005} = \frac{31,884058 - 32,871016}{31,724659 - 32,871016}$$
$$x = (0,860952 \cdot 0,002) + 0,005 \qquad x = 0,006721$$
$$J^{(12)} = 0,006721 \cdot 12 = 0,080652 \approx 8,065\,\%$$

Solución ejercicio 7.19

$$i^{(12)} = (1 + 0,0815)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i^{(12)} = 0,006550$$
$$11\,000 + 320\, a_{\overline{48}|0\,,006550} + 25\,000\,(1 + 0,0815)^{-4}$$
$$11\,000 + 13\,143,03 + 18\,274,01 = 42\,417,04$$

8

Financiación de la empresa

8.1. La financiación externa de la empresa
8.1.1. Las deudas empresariales a largo plazo
8.1.2. Las deudas empresariales a medio plazo
8.1.3. Las deudas empresariales a corto plazo
8.2. Arrendamiento financiero o «Leasing»
8.2.1. Valoración
8.3. Empréstitos. Introducción
8.3.1. Empréstitos sin cancelación escalonada
8.3.2. Empréstitos con cancelación escalonada
8.3.3. Problemática de los empréstitos
8.3.4. Elementos que intervienen en los empréstitos
8.4. Empréstito normal. Método francés
8.5. Empréstito de cupón cero
Ejercicios propuestos
Resolución de los ejercicios propuestos

8.1. La financiación externa de la empresa

Es muy rara la empresa que se financia exclusivamente con capital propio procedente de sus accionistas y de la autofinanciación. En su gran mayoría parte de los recursos con los que la empresa financia sus inversiones, procede de fuentes ajenas a la misma y constituyen su financiación externa.

La importancia relativa de la financiación externa de la empresa viene dada por el ratio de endeudamiento que *es la relación entre los recursos ajenos y los recursos propios*. Este ratio, en condiciones normales suele ser inferior a la unidad.

$$r = \frac{E}{P}$$

No se puede dar una regla general sobre la conveniencia o no de aumentar la financiación externa de la empresa, lo cual dependerá de la solvencia y del coste relativo entre los fondos propios y ajenos.

En términos generales, no se puede dar una regla general sobre la magnitud óptima del endeudamiento de la empresa, ya que esto depende de cada caso particular. En general, si se puede decir que si el coste de la financiación externa es menor que el coste del capital propio, convendrá aumentar el endeudamiento de la empresa, aunque sin sobrepasar unos límites de prudencia en función de la solvencia de la misma.

8.1.1. Las deudas empresariales a largo plazo

Los créditos empresariales a largo plazo permiten la financiación de las inversiones de la empresa en activo fijo, es decir, las fábricas, las instalaciones permanentes y la parte permanente de la misma. Los empréstitos, son una forma importante de este tipo de financiación.

8.1.2. Las deudas empresariales a medio plazo

Los créditos a medio plazo son recursos financieros intermedios entre los créditos a largo plazo y los créditos a corto plazo. En general, son deudas con vencimiento superior a un año e inferior a cinco (aunque no existe unanimidad al respecto). Se utilizan en ocasiones como créditos puente para otros créditos de más larga duración, o bien están destinados a financiar aquellos elementos del activo fijo que sin ser absolutamente permanentes tienen una duración intermedia como pueden ser determinados elementos del equipo productivo, maquinaria, etc.

8.1.3. Las deudas empresariales a corto plazo

La mayoría de las empresas tienen deudas a corto plazo para lograr el equilibrio de su tesorería y no quedarse sin liquidez en un momento dado, lo cual además de suponer unos costes de ruptura elevados para la empresa se traduce en un descrédito y desprestigio de la misma.

Las formas de crédito a corto plazo más utilizadas por las empresas, son:

1. *El crédito comercial* o crédito concedido a la empresa por los proveedores de la misma que se instrumenta generalmente en forma de facturas y el correspondiente adeudo en la cuenta del proveedor o de letras de cambio.
2. *El crédito bancario* a corto plazo. Las principales formas que adopta, son:

a) Descuento financiero,

b) Descubiertos en cuenta corriente, (véase 3.4 en la página 25) y cuenta de crédito, (véase 3.7 en la página 30),

c) Créditos estacionales (fundamentalmente en empresas agrícolas),

d) Descuento comercial, (véase 3.3 en la página 21).

3. *La venta de cuentas* de la empresa o cuentas a cobrar por parte de la misma (*factoring*).

8.2. Arrendamiento financiero o «Leasing»

Las empresas recurren muchas veces al arrendamiento como alternativa a la compra del capital productivo.

Los arrendamientos pueden ser de muy distintos tipos, pero todos tienen en común que el arrendatario (usufructuario) del bien, utiliza éste a cambio de un pago predeterminado al propietario del mismo (arrendador). Cuando el contrato de arrendamiento concluye, el bien alquilado revierte al propietario o arrendador, pero usualmente el contrato incluye la opción al arrendatario de comprar el bien a un precio preestablecido o bien efectuar un nuevo arrendamiento.

El arrendamiento financiero o *leasing* es un contrato de alquiler con opción de compra. Debe entenderse como un contrato de cesión de un bien que previamente la empresa arrendadora compra para si, con intención de cedérselo a un tercero en alquiler a cambio de cuotas periódicas, de igual cuantía, que incluyen parte de recuperación del coste y parte de intereses.

El contrato de *leasing* suele durar tanto como la vida económica del elemento patrimonial en cuestión aunque no necesariamente. Se establece así un plazo, un tiempo de cesión, durante el cual se va amortizando la totalidad de la inversión hasta llegar a un valor residual prefijado, generalmente igual al importe de una cuota suplementaria, la llamada *opción de compra*.

El *renting* , es un alquiler que tiene la posibilidad muy infrecuente y accesoria de poder optar por la adquisición al final del contrato. A diferencia del *leasing*, incluye todos los gastos de mantenimiento por cuenta del arrendador. El *leasing* es sobre todo una forma de financiación de bienes del inmovilizado.

8.2.1. Valoración

Ésta fórmula de financiación ha tenido un desarrollo extraordinario en las últimas décadas y es utilizada frecuentemente como alternativa a la inversión en bienes de equipo.

La equivalencia financiera de este tipo de operación, es

$$C_0 = a\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} + O_c\,(1+i)^{-n}$$

en la que O_c representa la opción de compra y la consideraremos prepagable dado que se trata de un arrendamiento. Habitualmente a esta opción de compra se la hace coincidir con un término amortizativo, es decir $a = O_c$, y entonces:

$$C_0 = a\,\ddot{a}_{\overline{n+1}|i} \tag{8.1}$$

El resto de magnitudes pueden obtenerse de la misma forma que en un préstamo francés considerando que la operación es prepagable tal como se describe en (7.4), página 112.

En particular, la determinación de I_s, sería:

$$I_s = (C_{s-1} - O_c)\, i$$

en la que al ser $a = O_c$,

$$I_s = (C_{s-1} - a)\, i \tag{8.2}$$

y el valor de A_s es,

$$A_1 = a - I_1$$

pudiendo obtener los siguientes como:

$$A_2 = A_1\,(1+i), \qquad A_3 = A_2\,(1+i), \qquad \cdots \qquad A_s = A_1\,(1+i)^{s-1}$$

El valor del capital amortizado M_s, vendrá determinado por,

$$M_s = A_1\, s_{\overline{s}|i}$$

y el capital pendiente C_s, utilizando el método prospectivo tal como vimos en (7.15) en la página 114,

$$C_s = a\, \ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i} \tag{8.3}$$

Ejemplo 8.1 La sociedad CRILASA, firma un contrato de arrendamiento financiero de una nave industrial, por importe de 432 000 € con una opción de compra final más el impuesto en vigor al adquirir la propiedad, por un total de 10 años, con pagos mensuales al 3,7080 % de interés nominal anual.

La comisión de apertura y gastos de formalización, han sido de 1 800,50 €.

Obtener las cuotas de amortización, el cuadro de amortización financiera de los 6 primeros pagos, los dos últimos y el tanto efectivo.

El tanto de interés mensual, sería:

$$i^{(m)} = \frac{j^{(m)}}{m} \qquad\qquad i^{(12)} = \frac{j^{(12)}}{12} = \frac{0,037080}{12} = 0,003090$$

y la cuota periódica, se obtendría como:

$$C_0 = a\, \ddot{a}_{\overline{n+1}|i} \qquad\qquad 432\,000 = a\, \ddot{a}_{\overline{121}|0\,,003090}$$

siendo,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$

y el valor de $\ddot{a}_{\overline{121}|0\,,003090}$,

$$\ddot{a}_{\overline{121}|0\,,003090} = \frac{1-(1+0,003090)^{-121}}{0,003090}(1+0,003090) = 101,137003$$

y por tanto,

$$a = \frac{432\,000}{101,137003} = 4\,271,43$$

Con la calculadora financiera,

[g] [BEG] 121 [n] 3,7080 [g] [i] 432000 [PV] 0 [FV] [PMT] obteniendo $-4271,43$

Utilizando el método prospectivo visto en (8.3), página 138, el capital pendiente al inicio del momento s, se definiría como:

$$C_s = a\, \ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i}$$

siendo para el momento $s = 118$,

$$C_{118} = 4\,271,43\, \ddot{a}_{\overline{121-118}|0\,,003090} = 4\,271,43 \cdot 2,990768 = 12\,774,87$$

El capital amortizado hasta el período s, para M_{119}, sería, calculando I_1 previamente,

$$I_1 = (C_0 - O_c)\, i = (432\,000 - 4\,271,43)\, 0,003090 = 1\,321,68$$

$$M_{119} = 2\,949,75\, s_{\overline{119}|0\,,003090} = 2\,949,75\, \frac{(1+0,003090)^{119}-1}{0,003090} = 423\,469,93$$

El cuadro de amortización solicitado, es el siguiente:

Período	Término	Intereses	Amortizado	Pendiente	Acumulado	21 % IVA	Total
0				432 000,00			
1	4 271,43	1 321,68	2 949,75	429 050,25	2 949,75	897,00	5 168,43
2	4 271,43	1 312,57	2 958,87	426 091,38	5 908,62	897,00	5 168,43
3	4 271,43	1 303,42	2 968,01	423 123,37	8 876,63	897,00	5 168,43
4	4 271,43	1 294,25	2 977,18	420 146,19	11 853,81	897,00	5 168,43
5	4 271,43	1 285,05	2 986,38	417 159,81	14 840,19	897,00	5 168,43
6	4 271,43	1 275,83	2 995,61	414 164,20	17 835,80	897,00	5 168,43
⋮							
118				12 774,87			
119	4 271,43	26,28	4 245,16	8 529,71	423 469,93	897,00	5 168,43
120	4 271,43	13,16	4 258,28	4 271,43	427 728,57	897,00	5 168,43
O_c	4 271,43				432 000,00	897,00	5 168,43

Y el tanto efectivo considerando los gastos:

$$432\,000 - 1\,800,50 = 4\,271,43\,\ddot{a}_{\overline{121}|i}$$

$$\ddot{a}_{\overline{121}|i_e} = \frac{430\,199,50}{4\,271,43} = 100,715568$$

Utilizando la calculadora financiera para resolver i:

$$\boxed{g}\ \boxed{BEG}\ 121\ \boxed{n}\ 100,715568\ \boxed{PV}\ 1\ \boxed{CHS}\ \boxed{PMT}\ \boxed{i}$$

$$12\ \boxed{n}\ 0\ \boxed{PMT}\ 100\ \boxed{CHS}\ \boxed{PV}\ \boxed{FV}\ \boxed{+}\ \text{obteniendo } 3,8642$$

$$i_{12} = 0,00316453 \qquad i = (1 + 0,00316453)^{12} - 1 \qquad i = 0,038642$$

Ejemplo 8.2 Determinar la cuota de una operación de arrendamiento financiero sobre una máquina de coste 20 000 € a 5 años con una opción de compra de 6 000 €. El tipo de interés establecido es del 8 % anual con pagos mensuales.

$$C_0 = a\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} + O_c\,(1+i)^{-n}$$

$$20\,000 = a\,\ddot{a}_{\overline{60}|0,006667} - 6\,000\,(1 + 0,006667)^{-60}$$

$$a = \frac{20\,000 - 6\,000\,(1 + 0,006667)^{-60}}{\dfrac{1 - (1 + 0,006667)^{-60}}{0,006667}\,(1 + 0,006667)} = 321,72$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener a,

$$\boxed{g}\ \boxed{BEG}\ 5\ \boxed{g}\ \boxed{n}\ 8\ \boxed{g}\ \boxed{i}\ 20000\ \boxed{PV}\ 6000\ \boxed{CHS}\ \boxed{FV}\ \boxed{PMT}\ \text{obteniendo } 321,72$$

8.3. Empréstitos. Introducción

Los empréstitos tienen su origen en las necesidades de financiación externa del Estado y de las Entidades públicas o privadas. Las cuantías elevadas que demandan en préstamo son dificilmente alcanzables en una sola operación, préstamo único, por lo que se recurre a la emisión de obligaciones, bonos o un agregado de préstamos.

Para que el conjunto de préstamos pueda integrarse en una sola operación es necesario que todos ellos se amorticen mediante una única ley financiera, en cuyo caso los préstamos son homogéneos.

Definimos *empréstito* como un conjunto de préstamos homogéneos de igual cuantía (prestación) y amortizables con idéntica contraprestación. El título valor de cada préstamo recibe el nombre de *obligación* y la cuantía de su prestación C, se denomina *valor nominal* de la obligación. Si designamos N_1 el número total de obligaciones que componen el empréstito, la prestación total o total nominal del empréstito será $C_0^T = C\,N_1$.

De forma general, y a fin de facilitar el acceso al pequeño inversor, se determina un valor nominal de las obligaciones bastante reducido lo que origina un número de obligaciones N_1 muy elevado. Es aconsejable, por razones de eficacia administrativa no mantener en vigor tan elevado número de obligaciones durante toda la vida del empréstito. Interesa, por tanto, ir cancelando periódicamente grupos de títulos con objeto de que vaya disminuyendo su número. A fin de compatibilizar la uniformidad de las operaciones con la diferente duración, se establece que la concreción de las obligaciones que corresponda cancelar en cada punto se efectúe por sorteo o por cualquier procedimiento equiprobable para todos. En base a esto, podemos distinguir dos tipos de empréstitos:

1. Los empréstitos con un solo punto de reembolso de títulos, es decir, con idéntica duración para todas las obligaciones.
2. Los empréstitos con cancelación escalonada de los títulos, es decir, formados por títulos con distinta duración, pero iguales términos de probabilidad.

8.3.1. Empréstitos sin cancelación escalonada

Este tipo de empréstitos con un solo punto de reembolso, no es otra cosa que un conjunto de préstamos exactamente iguales en todas sus características.

Por tanto, el empréstito, como operación resultante, es igual a uno cualquiera de los préstamos multiplicado por el número de ellos, y así, el estudio del empréstito como operación conjunta es aplicable a cada uno de los préstamos componentes y viceversa.

Este tipo de empréstitos, no presenta ninguna característica diferenciadora respecto de los préstamos que agrega, por lo que le serán de aplicación todas las conclusiones obtenidas en el estudio de las operaciones de amortización, manteniéndose incluso las expresiones de los casos particulares (préstamo simple, método americano, de cuotas constantes, etc.). Cuando la amortización se realiza sucesivamente a lo largo de su duración (método francés, de cuotas constantes, etc.) también se dice que el empréstito se amortiza por reducción del nominal de los títulos.

8.3.2. Empréstitos con cancelación escalonada

Se caracterizan por la aleatoriedad en la duración de sus títulos, determinándose por sorteo las obligaciones que corresponde cancelar en cada punto de amortización.

8.3.3. Problemática de los empréstitos

Con relación al ente emisor, su fin principal es obtener la necesaria financiación en las mejores condiciones posibles. Cuando el importe de la emisión se destina a financiar una inversión, el emisor tratará de conseguir que la contraprestación, en cuanto a su duración y distribución de cuantías y vencimientos, se adapte de forma óptima al rendimiento de la inversión y necesidades de liquidez, para lo que fundamentalmente puede actuar sobre el programa de cancelación.

Con relación al obligacionista, la suscripción de obligaciones de un empréstito supone para el obligacionista una inversión de capital. La decisión de la inversión se apoya, a igualdad de otras circunstancias, en la mayor rentabilidad efectiva.

Desde el mercado de capitales, el empréstito está condicionado por las circunstancias que concurren en el mercado en el momento de la emisión.

8.3.4. Elementos que intervienen en los empréstitos

La variedad y peculiaridad de los empréstitos es amplia. Aunque su base está en los préstamos, los elementos que intervienen son los siguientes:

$C_0 = C\,N_1$, valor nominal del empréstito,
N_1 = número de títulos emitidos a reembolsar,
N_{k+1} = obligaciones o títulos en circulación o vivos al comienzo del año $k+1$,
C = valor nominal de cada título,
C_k = valor de reembolso o precio de amortización de cada obligación que se amortiza en el año k,
P_k = prima de amortización en el año k,
L_k = valor del lote en el año k,
i_k = tipo de interés nominal satisfecho en el año k. Puede ser constante o variable,
n = número de años de duración del empréstito,
M_k = número de obligaciones amortizadas en el año k,
$m_k = \sum_{r=1}^{k} M_r$, número de obligaciones amortizadas al final de los k primeros períodos,
I_k = intereses satisfechos en el año k, por la entidad emisora,
$C\,i_k$ = cupón anual o interés de una obligación satisfecho al final del año k,
a_k = anualidad satisfecha por la entidad emisora al final del año k

8.4. Empréstito normal. Método francés

Como hemos establecido anteriormente en los empréstitos puros o normales, la emisión y amortización de títulos es a la par, es decir, por el nominal; con pago periódico de intereses y cupón vencido, anual o fraccionado.

Teniendo en cuenta que los empréstitos son un conjunto de préstamos, utilizaremos análogos razonamientos a los empleados en la amortización de préstamos (véase 7.4 en la página 112). En la práctica el empréstito normal es aquél que se amortiza siguiendo el método del sistema progresivo francés o anualidades constantes.

Dado un empréstito de N_1 obligaciones de nominal C, que devengan el interés anual i, pagadero de forma vencida y amortizado en n períodos mediante anualidades, que comprenden cada uno los intereses de los títulos en circulación y una cantidad destinada a la amortización de un cierto número de obligaciones.

$$C_k = C \qquad a_k = a \qquad i_k = i$$

el valor actual de la contraprestación, será,

$$N_1\,C = a\,a_{\overline{n}|i} \qquad a = \frac{N_1\,C}{a_{\overline{n}|i}} \tag{8.4}$$

La primera anualidad,

$$a = M_1\,C + N_1\,C\,i \qquad M_1 = \frac{a - N_1\,C\,i}{C}$$

y de esta forma determinamos el número de títulos amortizados el primer año.

Si comparamos las anualidades de dos años consecutivos k y $k+1$, tendremos:

$$a = M_k\,C + N_k\,C\,i \qquad a = M_{k+1}\,C + N_{k+1}\,C\,i$$

igualando,

$$M_k\,C = N_k\,C\,i = M_{k+1}\,C + N_{k+1}\,C\,i$$

$$C\,M_{k+1} = C\,M_k + N_k\,C\,i - N_{k+1}\,C\,i = C\,M_k + C\,i(N_k - N_{k+1})$$

dividiendo ambos por C, y teniendo en cuenta que $N_k - M_{k+1} = M_k$,

$$M_{k+1} = M_k + M_k\,i = M_k\,(1+i)$$

es decir, los títulos amortizados forman una progresión geométrica de razón $(1+i)$. Aplicando la relación entre un término cualquiera y el primero,

$$M_k = M_1\,(1+i)^{k-1} \tag{8.5}$$

expresión que nos permite calcular los términos amortizados en cualquier momento k en función de los amortizados en el primer año. ∎

Teniendo en cuenta esta relación,

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1 = \frac{a - N_1\,C\,i}{C} \\ M_2 &= M_1\,(1+i) \\ M_3 &= M_1\,(1+i)^2 \\ &\vdots \\ M_n &= M_1\,(1+i)^{n-1} \end{aligned}$$

sumando los primeros miembros e igualándolo a la suma de los segundos,

$$\sum_{s=1}^{n} M_s = M_1\,\left[1 + (i+1) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}\right]$$

expresión en la que el primer miembro es el total de obligaciones emitidas N_1 y el segundo es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1+i)$, por lo que aplicando (A.11) de la página 173:

$$N_1 = M_1\,\frac{(1+i)^{n-1}(1+i) - 1}{(1+i) - 1} = M_1\frac{(1+i)^n - 1}{i} = M_1\,s_{\overline{n}|i}$$

de donde,

$$N_1 = M_1\,s_{\overline{n}|i} \tag{8.6}$$

expresión que nos permite obtener el número de títulos amortizados en el primer año en función del número total de títulos emitidos:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n}|i}} \tag{8.7}$$

Las obligaciones en circulación al comienzo de un año cualquiera $k+1$, las calculamos a partir del capital pendiente de amortizar que al comienzo de dicho año será,

$$N_{k+1}\,C = a\,a_{\overline{n-k}|i}$$

y por tanto,

$$N_{k+1} = \frac{a}{C}\,a_{\overline{n-k}|i} = N_1\,\frac{a_{\overline{n-k}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \tag{8.8}$$

El número de obligaciones amortizadas en un año cualquiera k, también puede obtenerse por diferencia entre las obligaciones en circulación al inicio del año k y $k+1$,

$$M_k = N_k - N_{k+1} = \frac{a}{C}\,\left(a_{\overline{n-k+1}|i} - a_{\overline{n-k}|i}\right) = \frac{a}{C\,(1+i)^{n-k+1}}$$

El número de obligaciones amortizadas al final de los k primeros años, aplicando (8.6), será:

$$m_k = \sum_{s=1}^{k} M_s = M_1\, s_{\overline{k}|i} = N_1\, \frac{s_{\overline{k}|i}}{s_{\overline{n}|i}}$$

■

La construcción del cuadro es análogo a la del préstamo estudiado en 7.4.5 de la página 115, con la dificultad de obtener el número de obligaciones amortizadas para cada año que se obtiene para los distintos valores de k de la expresión (8.5). Estos, generalmente no son enteros y para solucionar el problema, existen dos procedimientos:

1. *Método de capitalización de los residuos o teórico*, que consiste en amortizar un número entero por defecto de obligaciones y colocar a interés el residuo de la anualidad para acumularlo en el siguiente.
2. *Método de redondeo de las amortizaciones teóricas o práctico* consistente en calcular los títulos amortizados cada año, sin considerar que estos números han de ser enteros, sumar después los números enteros de los títulos amortizados cada año y completar los que faltan hasta la totalidad de los emitidos, redondeando por exceso los de aquellos años que tengan mayor parte decimal.

Ejemplo 8.3 Formar el cuadro de amortización de un empréstito normal de 10 000 obligaciones de 100 € nominales cada una, cupón anual de 5 €, duración de la amortización 10 años por el método de los residuos y por el método de redondeo de las amortizaciones teóricas.

1. Método de capitalización de los residuos:
   La anualidad teórica,

   $$a = \frac{N_1\, C}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{10\,000 \cdot 100}{a_{\overline{10}|0,05}} = 129\,504,57$$

   Los intereses del primer año,

   $$I_1 = N_1\, C\, i = 10\,000 \cdot 100 \cdot 0,05 = 50\,000$$

   La cantidad disponible para amortizar,

   $$A_1 = a - I_1 = 129\,504,57 - 50\,000 = 79\,504,57$$

   al ser las obligaciones de 100 € pueden amortizarse solo 795 títulos quedando un residuo de 4,57 €. La anualidad queda disminuida en este importe y para conseguir que la amortización sea posible en los 10 años previstos, acumularemos a la segunda anualidad el residuo del primer año con sus intereses al 5 %.
   En el segundo año dispondremos de la anualidad,

   $$a_2 = 129\,504,57 + 4,57 \cdot 1,05 = 129\,509,38$$

   La cuota de intereses del segundo año, teniendo en cuenta que los títulos en circulación son,

   $$N_2 = N_1 - M_1 = 10\,000 - 795 = 9\,205$$
   $$I_2 = N_2\, C\, i = 9\,205 \cdot 100 \cdot 0,05 = 46\,025$$

   quedará disponible para amortizar,

   $$A_2 = a_2 - I_2 = 129\,509,38 - 46\,025 = 83\,484,38$$

   cantidad que permite amortizar 834 títulos y deja un residuo de 84,38 € que se acumulará junto con sus intereses al tercer período, por lo que dispondremos de una anualidad de,

   $$a_3 = 129\,504,57 + 84,38 \cdot 1,05 = 129\,593,17$$

y así seguiremos hasta el último año.

El cuadro correspondiente por el método de capitalización de residuos, sería el siguiente:

	Anualidad			Amortización			Residuo e	Amortizadas		
Años	Disponible	Efectiva	Intereses	Teórica	Efectiva	Residuo	Intereses	Anual	Total	Vivas
										10 000
1	129 504,57	129 500	50 000	79 504,57	79 500	4,57	4,80	795	795	9 205
2	129 509,38	129 425	46 025	83 484,38	83 400	84,38	88,60	834	1 629	8 371
3	129 593,17	129 555	41 855	87 738,17	87 700	38,17	40,08	877	2 506	7 494
4	129 544,66	129 470	37 470	92 074,66	92 000	74,66	78,39	920	3 426	6 574
5	129 582,96	129 570	32 870	96 712,96	96 700	12,96	13,61	967	4 393	5 607
6	129 518,19	129 435	28 035	101 483,19	101 400	83,19	87,35	1 014	5 407	4 593
7	129 591,92	129 565	22 965	106 626,92	106 600	26,92	28,27	1 066	6 473	3 527
8	129 532,84	129 435	17 635	111 897,84	111 800	97,84	102,73	1 118	7 591	2 409
9	129 607,31	129 545	12 045	117 562,31	117 500	62,31	65,43	1 175	8 766	1 234
10	129 570,00	129 570	6 170	123 400,00	123 400	0,00	0,00	1 234	10 000	0

2. Método de redondeo de las amortizaciones teóricas:

   Este método se utilizará por su simplicidad. Siendo,

$$M_1 = \frac{a - N_1\, C\, i}{C}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{129\,504,57 - 10\,000 \cdot 100 \cdot 0,05}{100} = 795,0457 \approx 795\\
M_2 &= 795,0457\,(1+0,05) = 834,7980 \approx 835\\
M_3 &= 834,7980\,(1+0,05) = 876,5379 \approx 877\\
M_4 &= 876,5379\,(1+0,05) = 920,3647 \approx 920\\
M_5 &= 920,3647\,(1+0,05) = 966,3829 \approx 966\\
M_6 &= 966,3829\,(1+0,05) = 1\,014,7020 \approx 1\,015\\
M_7 &= 1\,014,7020\,(1+0,05) = 1\,065,4371 \approx 1\,065\\
M_8 &= 1\,065,4371\,(1+0,05) = 1\,118,7089 \approx 1\,119\\
M_9 &= 1\,118,7089\,(1+0,05) = 1\,174,6443 \approx 1\,175\\
M_{10} &= 1\,174,6443\,(1+0,05) = 1\,233,3765 \approx 1\,233\\
&Total = 10\,000
\end{aligned}$$

   La construcción del cuadro es inmediata, resultando diferente al confeccionado por el método de residuos:

			Amortizados		Anualidad	
Años	Vivos	Intereses	Año	Total	Práctica	Teórica
1	10 000	50 000	795	795	129 500	129 504,57
2	9 205	46 025	835	1 630	129 525	129 504,57
3	8 370	41 850	877	2 507	129 550	129 504,57
4	7 493	37 465	920	3 427	129 465	129 504,57
5	6 573	32 865	966	4 393	129 465	129 504,57
6	5 607	28 035	1 015	5 408	129 535	129 504,57
7	4 592	22 960	1 065	6 473	129 460	129 504,57
8	3 527	17 635	1 119	7 592	129 535	129 504,57
9	2 408	12 040	1 175	8 767	129 540	129 504,57
10	1 233	6 165	1 233	10 000	129 465	129 504,57

   En la práctica, el pago de los intereses se hace mediante cupones semestrales, trimestrales, etc. En este caso, se dividen los intereses anuales, en tantas partes como cupones se paguen dentro del año, suponiendo que el tanto anual es el nominal no el efectivo.

8.5. Empréstito de cupón cero

Son empréstitos con un único pago de intereses en el momento de la amortización de los títulos. Los intereses se devengan día a día, pero no se pagan sobre los títulos vivos, sino que se acumulan en capitalización compuesta y se pagan de una vez en los títulos amortizados en cada sorteo.

Si la anualidad es constante, tal como hemos visto en 8.4 de la página 141:

$$N_1\, C = a\, a_{\overline{n}|i}$$

y, por tanto,

$$a = \frac{N_1\, C}{a_{\overline{n}|i}}$$

Al ser constante,

$$M_k = \frac{a}{C}\,(1+i)^{-k}$$

$$M_{k+1} = \frac{a}{C}\,(1+i)^{-k+1}$$

y, en consecuencia,

$$M_{k+1} = M_k\,(1+i)^{-1}$$

es decir, los títulos forman una progresión geométrica decreciente de razón $(1+i)^{-1}$ ∎

Ejemplo 8.4 Confecciona el cuadro de amortización de un empréstito de 10 000 obligaciones, emitidas y amortizadas a la par en 3 años por sorteo de términos amortizativos de igual cuantía si el nominal de los títulos asciende a 50 € y son cupón cero, con una rentabilidad efectiva anual del 4 %

$$a = \frac{N_1\, C}{a_{\overline{n}|i}} \qquad a = \frac{10\,000\,50}{a_{\overline{3}|0,04}} \qquad a = 180\,174,27$$

$$M_1 = \frac{a}{C}\,(1+i)^{-1} \qquad M_1 = \frac{180\,174,27}{50}\,(1+0,04)^{-1} = 3\,464,88$$

$$M_2 = N_1\,(1+i)^{-1} \qquad M_2 = 3\,464,88\,(1+0,04)^{-1} = 3\,361,62$$

$$M_3 = N_2\,(1+i)^{-1} \qquad M_3 = 3\,361,62\,(1+0,04)^{-1} = 3\,203,48$$

Redondeando,

$$M_1 = 3\,465$$
$$M_2 = 3\,332$$
$$M_3 = 3\,203$$

Años	Anualidad	Intereses	Amortización	Vivos
				10 000
1	180 180,00	3 465	3 465	6 535
2	180 194,56	3 332	6 797	3 203
3	180 146,98	3 203	10 000	0

Ejercicios propuestos

Ejercicio 8.1 Una sociedad firma un contrato de *leasing* por 20 000 €, que deberá amortizar mediante 36 mensualidades más una opción de compra, siendo el tipo de interés del 5 %. Confeccionar los tres primeros pagos del cuadro de amortización.

Solución: $a = 581,98$

Ejercicio 8.2 Se firma un contrato de arrendamiento financiero de 40 000 €, al 6 % de interés efectivo anual, con pagos trimestrales a 3 años. Determinar el valor de cada cuota y los intereses correspondientes al décimo período sabiendo que la opción de compra es una cuota más.

Solución: 1) $a = 3\,352,98$ 2) $I_{10} = 143,38$

Ejercicio 8.3 Se concierta un contrato de *leasing* con una entidad por 120 000 € a un plazo de 10 años más una opción de compra equivalente a una cuota, con pagos de las cuotas mensualmente al interés efectivo anual del 6 %. Obtener:

1. Mensualidad,

2. Intereses pagados en el primer año de vigencia,
3. Capital pendiente de pago al inicio del 6 año.

Solución: 1) $a = 1\,308,27$ 2) $\sum_{s=1}^{12} I = 6\,694,32$ 3) $C_{60} = 69\,238,65$

Ejercicio 8.4 Calcular la cuota correspondiente a un contrato de arrendamiento financiero de pagos mensuales, por 5 años, a un tipo de interés variable del 5 % nominal anual inicial, si el importe del mismo es de 24 000 € más una opción de compra equivalente a una mensualidad. Obtener además:

1. Capital amortizado en los dos primeros años,
2. Intereses totales de la operación,
3. Mensualidad del mes 14 en el supuesto de que el tipo de interés se haya modificado al 5,5 %.

Solución: $a = 444,52$ 1) $M_{24} = 8\,723,73$
2) $\sum_{s=1}^{61} I = 3\,115,78$ 3) $a' = 448,72$

Ejercicio 8.5 Se emite un empréstito de 100 000 obligaciones de 1 000 € nominales, durante 10 años, cupón anual vencido de 60 €, amortizable mediante anualidades constantes. Se pide:

1. Anualidad constante que amortiza el empréstito,
2. Títulos vivos a partir del 6.º año,
3. Títulos amortizados en el 5.º sorteo,
4. Títulos amortizados después de 7 sorteos,
5. Cuantía dedicada al pago de cupones en el 7.º sorteo.

Solución: 1) $a = 13\,586\,795,82$ 2) $N_6 = 47\,080$ 3) $M_5 = 9\,578$
4) $m_7 = 63\,682$ 5) $I_7 = 2\,824\,800$

Ejercicio 8.6 En un empréstito de 10 000 títulos, de 500 € nominales, amortizables mediante anualidades constantes en 5 años, con abono de cupón anual vencido de 40 € por obligación, se pide construir el cuadro de amortización por los métodos:

1. De capitalización de los residuos,
2. De redondeo de las amortizaciones teóricas.

Ejercicio 8.7 Del cuadro de amortización de un empréstito normal hemos tomado los siguientes datos: intereses del primer año 300 000 €; intereses del segundo año 263 154 €; siendo el número de teórico de títulos amortizados el último año 987,54185, el nominal de las obligaciones 1 000 €, se pide:

1. Tanto de valoración del empréstito,
2. Anualidad del mismo,
3. Número de títulos emitidos,
4. Duración del empréstito.

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 8.1 Entendemos que la opción de compra coincide con un término amortizativo,

$$i^{(12)} = \frac{0,05}{12} = 0,004167$$

$$a = \frac{C_0}{\ddot{a}_{\overline{n+1}|i}} \qquad a = \frac{20\,000}{\ddot{a}_{\overline{37}|0,004167}} \qquad a = 581,98$$

$I_1 = (C_0 - O_c)\, i$	$I_1 = (20\,000 - 581,98)\, 0,004167 = 80,91$
$A_1 = a - I_1$	$A_1 = 581,98 - 80,91 = 501,07$
$C_1 = a\, \ddot{a}_{\overline{37-1}|0,004167}$	$C_1 = 581,98 \cdot 33,504725 = 19\,499,08$
$I_2 = (C_1 - O_c)\, i$	$I_2 = (19\,499,08 - 581,98)\, 0,004167 = 78,82$
$A_2 = a - I_2$	$A_2 = 581,98 - 78,82 = 503,16$
$A_2 = A_1\,(1+i)$	$A_2 = 501,07\,(1 + 0,004167) = 503,16$
$C_2 = a\, \ddot{a}_{\overline{37-2}|0,004167}$	$C_2 = 581,98 \cdot 32,640161 = 18\,995,92$
$C_2 = C_1 - A_2$	$C_2 = 19\,499,08 - 503,16 = 18\,995,92$

Al importe de cada término a habría que añadirle el IVA vigente.

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					20 000,00
1	581,98	80,91	501,07	501,07	19 499,08
2	581,98	78,82	503,16	1 004,23	18 995,92

Solución ejercicio 8.2 Obtenemos en primer lugar el tipo de interés efectivo trimestral,

$$i^{(4)} = (1 + 0,06)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,014674$$

$$a = \frac{40\,000}{\ddot{a}_{\overline{12+1}|0,014674}} \qquad a = 3\,352,98$$

$$I_{10} = (C_9 - O_c)\, i \qquad C_9 = a\, \ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i}$$

$$C_9 = 3\,352,98\, \ddot{a}_{\overline{4}|0,014674} \qquad C_9 = 13\,123,78$$

$$I_{10} = (13\,123,78 - 3\,352,98)\, 0,014674 \qquad I_{10} = 143,38$$

Solución ejercicio 8.3

1.

$$i^{(12)} = (1 + 0,06)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i^{(12)} = 0,004868$$

$$a = \frac{120\,000}{\ddot{a}_{\overline{121}|0,004868}} \qquad a = 1\,308,27$$

$$C_{12} = a\, \ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i} \qquad C_{12} = 1\,308,27\, \ddot{a}_{\overline{121-12}|0,004868}$$

$$C_{12} = 1\,308,27 \cdot 84,841251 \qquad C_{12} = 110\,995,26$$

2.

$$\begin{aligned} 1\,308,27 \cdot 12 &= 15\,699,24 \\ &- \quad 9\,004,74 \\ &= \quad 6\,694,32 \end{aligned}$$

3.

$$C_{60} = 1\,308,27\, \ddot{a}_{\overline{121-60}|0,004868} \qquad C_{60} = 69\,238,65$$

Solución ejercicio 8.4

$$i^{(12)} = \frac{0,05}{12} \qquad i^{(12)} = 0,004167$$

$$24\,000 = a\, \ddot{a}_{\overline{61}|0,004167} \qquad a = \frac{24\,000}{\ddot{a}_{\overline{61}|0,004167}} \qquad a = 444,52$$

1.

$$M_{24} = C_0 - C_{24} \qquad C_{24} = a\, \ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i}$$

$$C_{24} = 444,52\, \ddot{a}_{\overline{61-24}|0,004167} \qquad C_{24} = 15\,276,24$$

$$M_{24} = 24\,000 - 15\,276,24 = 8\,723,76$$

2.

$$444,52 \cdot 61 - 24\,000 = 3\,115,78$$

3. Obtenemos en primer lugar el capital pendiente,

$$C_{13} = 444,52\,\ddot{a}_{\overline{61-13}|0,004167} \qquad C_{13} = 19\,382,79$$

$$a' = \frac{19\,382,79}{\ddot{a}_{\overline{48}|0,004583}} \qquad a' = 448,72$$

9

Títulos valores: operaciones bursátiles

9.1. Títulos valores: valores mobiliarios
9.2. Títulos valores: conceptos
9.3. Mercado de valores
9.4. Rentabilidad de los títulos valores
9.5. Valoración de los títulos valores
9.6. Valoración de los títulos de renta fija
9.6.1. Compra por suscripción y mantenimiento hasta su amortización
9.6.2. Compra por suscripción y venta del título en el mercado
9.6.3. Compra en el mercado y mantenimiento hasta su amortización
9.6.4. Compra en el mercado y venta en el mercado
9.7. Valoración de las acciones
9.7.1. Valoración en función de los dividendos
9.7.2. Valoración en función de los beneficios
9.8. Valoración de las letras financieras
9.8.1. Adquisición inicial y mantenimiento hasta su vencimiento
9.8.2. Adquisición inicial y venta en el mercado secundario
9.8.3. Adquisición de la letra en el mercado secundario
Ejercicios propuestos
Resolución de los ejercicios propuestos

9.1. Títulos valores: valores mobiliarios

Los títulos valores son documentos que incorporan una promesa unilateral de realizar una determinada prestación a favor de quien resulte legítimo tenedor del documento.

Nace en consecuencia un *mercado de títulos de crédito* cuya vertiente económica es la aparición del denominado *mercado financiero*. Estos, confieren al tenedor el derecho a obtener del deudor una suma de dinero (títulos de pago) o derechos de socio (títulos de participación social).

En el *mercado de capitales* se negocian operaciones de financiación y se obtienen recursos financieros a cambio de títulos de crédito.

En el *mercado de valores* se negocian las operaciones de capital cuyo objeto es financiar inversiones y se obtienen medios de financiación contra la entrega de títulos valores. Los más frecuentes son los que se realizan sobre valores mobiliarios, no obstante, son también importantes los que se realizan con la contratación de letras financieras, pagarés del tesoro y de empresa.

Los *valores mobiliarios* son títulos valores emitidos en masa con iguales derechos a los que se asocia una fácil transmisibilidad. Estos, se clasifican en:

- Las *acciones*, títulos valores que representan partes alícuotas del capital social e incorporan derechos de socio: participar en los beneficios sociales, en el patrimonio resultante en la liquidación y derecho preferente de suscripción de nuevas acciones.

  Cabe distinguir entre acciones nominativas y al portador, acciones de goce o disfrute y acciones ordinarias y privilegiadas.

- Las *obligaciones* son títulos o documentos que representan partes alícuotas de créditos contra las sociedades emisoras. Confieren derechos de prestamista o acreedor y nacen para ser amortizadas. Se les suele designar en ocasiones con los nombres de cédulas hipotecarias, bonos, bonos bancarios, etc. Sus derechos económicos son la devolución del principal y obtención de rendimientos que se concretan en intereses o cupones, primas, lotes u otras posibles ventajas con repercusión económica (véase 8.4 en la página 141).

  Se distinguen entre otras, obligaciones nominativas y al portador, obligaciones con características comerciales o sin ellas (puras), obligaciones ordinarias o con garantías y obligaciones a interés fijo o variable.

- Los *fondos públicos o deuda pública* son obligaciones emitidas normalmente a un interés fijo por una Corporación de Derecho Público (Estado, Autonomía, Provincia, etc.).

  Se puede clasificar en consolidada y flotante, amortizable y perpetua, nominativa y al portador, interior y exterior, general y específica, pignorable y no pignorable, con y sin impuestos.

- Las *letras financieras*, negociadas en el mercado de valores, son letras de cambio libradas por bancos con objeto de obtener recursos de sus clientes.

- Los *pagarés del Tesoro* son deuda pública a corto plazo cuya finalidad es obtener financiación para los déficits presupuestarios.

- Los *pagarés de empresa* son valores emitidos para obtener financiación mediante endeudamiento a corto plazo.

9.2. Títulos valores: conceptos

Los conceptos más importantes sobre los títulos valores, son:

1. *Valor nominal* es el importe que lleva impreso en el título y corresponde:
   - En las *acciones* a la parte alícuota del capital social de cada título.
   - En las *obligaciones* y *deuda pública* a la parte alícuota de los créditos puestos en circulación.
   - En la *letra* y en el *pagaré* al valor que se tiene que recibir en su vencimiento.
2. *Valor efectivo* es el coste real que supone para el suscriptor o comprador la adquisición del título. En el momento de la emisión puede coincidir con el valor nominal o ser inferior o superior. En el primer caso, se emite a la par, si es inferior, por debajo de la par y de ser superior por encima de la par o con prima de emisión positiva.

   En el caso de las letras o pagarés, el valor efectivo es siempre inferior al nominal ya que esta diferencia es el rendimiento del título por descuento.
3. *Valor de cotización* también denominado de curso o de cambio, designa el precio que el mercado fija para el título.

   Si los títulos cotizan en Bolsa, su valor se conoce a partir de las cotizaciones oficiales. Este valor de cotización estará a la par, sobre la par o bajo par, según sea igual, superior o inferior al valor nominal del título.
4. *Valor de reembolso o amortización* es el precio que el emisor paga por el título en el momento de la amortización. Puede coincidir o no con el valor nominal y está previsto desde el origen de la emisión.

   Si no coincide con el nominal, es debido a premios, generalmente positivos que pueden venir en forma de primas, lotes u otro tipo de ventaja.

   Otra forma de reembolso consiste en la compra en Bolsa hecha por el emisor, desconociéndose en este caso el precio. Es preciso considerar que algunos empréstitos (deuda pública perpetua) carecen de reembolso. Estos, solo pueden ser emitidos por el Estado por ser la única entidad que puede comprometerse perpetuamente al pago de los intereses.

   En una letra o pagaré, el valor de amortización coincide con el nominal.
5. *Intereses*. Las obligaciones, producen intereses determinados en el momento de la emisión.

   Reciben el nombre de *cupones* los intereses que periódicamente perciben (anual, semestral, etc.) en concepto de rendimiento sus poseedores. Tradicionalmente los títulos van provistos de unos cupones correspondientes a cada vencimiento de los intereses.

   En las letras y pagarés el rendimiento es la diferencia entre el valor de adquisición y amortización o venta.
6. *Dividendos* son las cuantías que tiene que entregar el suscriptor de una acción para pagarla. Se designa también con este nombre cada sección en la distribución de los beneficios obtenidos por la sociedad.

   La primera consideración del dividendo, denominada *dividendo pasivo* es la salida de dinero para el poseedor de la acción. La segunda, constituye una entrada de dinero, denominada *dividendo activo* o simplemente dividendo. Estos, representan para las acciones lo mismo que los intereses en las obligaciones.

9.3. Mercado de valores

Las empresas, para realizar sus inversiones necesitan captar recursos financieros que destinarán posteriormente a la adquisición de bienes.

El *capital propio*, junto con la *financiación interna* o autofinanciación no son suficientes para las necesidades de la empresa. Es necesario acudir a la *financiación externa* y obtener recursos en el *mercado financiero*.

El *mercado de capitales* es el mercado financiero a largo plazo. Si es a corto plazo, se denomina *mercado de dinero*.

El *mercado de capitales* o *mercado de valores* es aquel en que se negocian las operaciones cuyo objeto es la financiación de inversiones. Este se clasifica en *mercado primario* o de emisión que es donde la empresa obtiene directamente la financiación mediante la emisión de títulos valores y *mercado secundario* o *bolsa de valores* que facilita la liquidez necesaria de los valores mobiliarios y completa por tanto las cualidades exigidas a todo activo financiero (rentabilidad, seguridad y liquidez).

Los mercados secundarios facilitan información básica para el adecuado funcionamiento del mercado primario. De este modo, trata de canalizar los recursos financieros de los ahorradores a inversiones. A cambio, los ahorradores reciben títulos que encierran una promesa de rendimiento predeterminable (obligaciones, letras, etc.) o una promesa de rendimiento aleatorio y derechos sobre el patrimonio (acciones).

En el mercado secundario, se realizan multitud de operaciones diariamente que permiten invertir los ahorros, alterar la composición de las carteras o desprenderse total o parcialmente de títulos para maximizar los beneficios.

La función primordial del mercado secundario en la asignación de recursos consiste en establecer el precio aproximado de las emisiones de nuevos valores. Aunque los inversores posean información análoga, la diversidad de interpretación conduce a que haya ahorradores que deseen adquirir valores y otros que pretendan desprenderse de ellos.

Son funciones del mercado de valores:

1. Permitir al pequeño ahorrador colaborar en el proceso de financiación de las inversiones.
2. Facilitar la transmisión de títulos entre compradores y vendedores.
3. Posibilitar la formación de precios justos.

9.4. Rentabilidad de los títulos valores

La rentabilidad de un título mide la relación entre los rendimientos que se obtienen en un período y la inversión realizada en él. Este rendimiento coincidirá con los intereses si se trata de obligaciones o los dividendos cuando los títulos son acciones.

Podemos clasificar la rentabilidad:

1. *Rentabilidad bruta*: es la que se obtiene cuando se toma como referencia la renta bruta, esto es, cuando no se consideran los impuestos, corretajes y comisiones soportados.

2. *Rentabilidad neta*: surge cuando se toma como referencia la renta al deducir los impuestos y gastos.

3. *Rentabilidad nominal*: es la que se obtiene en relación al nominal del título.

4. *Rentabilidad efectiva*: al relacionar el rendimiento con el valor de cotización actual o de adquisición.

Las variables a considerar, son:

C = valor nominal del título,
V = valor efectivo de adquisición,
R_b = renta bruta o rendimiento del periodo,
g = comisiones y gastos,
t = tipo impositivo,
R_n = renta neta del período, $R_n = R_b - tR_b - gC = R_b(1-t) - gC$.

En consecuencia, la *rentabilidad nominal bruta*, la definimos como,

$$i'_n = \frac{R_b}{C}$$

la *rentabilidad nominal neta*, será,

$$i_n = \frac{R_n}{C}$$

la *rentabilidad efectiva bruta*,

$$i'_e = \frac{R_b}{V}$$

y, *la rentabilidad efectiva neta*,

$$i_e = \frac{R_n}{V}$$

Ejemplo 9.1 Un título de 10 € nominales que cotiza a 11 € (110 %), produce una renta del 15 % sobre el nominal. Determinar sus rentabilidades nominales y efectiva (brutas y netas) si los impuestos son del 18 % y la comisión bancaria de custodia de los títulos asciende al 3‰ del nominal.

$$R_b = 10 \cdot 0,15 = 1,5$$

$$R_n = R_b(1-t) - gC \qquad R_n = 1,5\,(1-0,18) - 0,003 \cdot 10 = 1,20$$

$$i'_n = \frac{R_b}{C} = \frac{1,5}{10} = 0,15 \qquad i_n = \frac{R_n}{C} = \frac{1,20}{10} = 0,12$$

$$i'_e = \frac{R_b}{V} = \frac{1,5}{11} = 0,1364 \qquad i_e = \frac{R_n}{V} = \frac{1,2}{11} = 0,1091$$

Al inversor la rentabilidad que le interesa conocer es la efectiva neta o tanto efectivo de rendimiento y las magnitudes que la definen, las cuales satisfacen las siguientes relaciones:

$$i_e = \frac{R_n}{V} \qquad R_n = \frac{i_e}{V} \qquad V = \frac{R_n}{i_e}$$

El tanto efectivo i_e es una medida utilizada como criterio de comparación entre títulos que dirá *dos valores cotizan en paridad cuando el tanto efectivo de rendimiento que proporcionan es el mismo.*

9.5. Valoración de los títulos valores

Valor de cotización o de mercado de un título

El precio de un título de renta variable viene dado por el acuerdo entre compradores (demanda) y vendedores (oferta).

En la oferta y demanda influyen los siguientes factores: historia de las cotizaciones, política de dividendos, expectativas futuras de la empresa, nivel de actividad del país, tipo de interés del mercado, coste de capital, rendimiento esperado por el inversor, necesidades de liquidez, etc.

La experiencia indica que los valores de renta fija (obligaciones) son reemplazados por los de renta variable en las fases de expansión económica y al revés en las contracciones.

Valor teórico de un título

La valoración o cálculo del precio teórico de un título tiene la finalidad de establecer una estimación razonable de su valor y dar una opinión sobre el nivel de cotización del título.

Cuando el estudio de los datos económicos y financieros de la empresa así como de su comportamiento futuro, presentan rasgos favorables puede concluirse que es interesante comprar un título. La evaluación tiene por objeto determinar un valor razonable.

En consecuencia, la evaluación puede no llegar hasta el cálculo exacto de su valor, sino simplemente dar una opinión sobre si su cotización es o no demasiado alta.

Comparación del precio teórico con el de mercado

Si denominamos P al precio de cotización en el mercado financiero de un título y V el valor teórico del mismo, puede ocurrir que ambos coincidan o sean diferentes. Lo habitual es que $P \neq V$. Si $V > P$, el inversor, tratará de adquirir títulos; si $V < P$, tratará de vender sus títulos y si $V = P$, se presenta una situación de indiferencia.

Desde el punto de vista del inversor, este se encuentra con el precio P de mercado y deberá calcular su propio V de acuerdo con los criterios más racionales que tratamos de describir.

9.6. Valoración de los títulos de renta fija

La nomenclatura a utilizar es la siguiente:

V_s = valor de la obligación al final del año s,
$\mathcal{V}_s$ = valor teórico al final del año s,
C = valor nominal de una obligación,
i = tipo de interés,
C_s = valor de amortización o reembolso en el año s,
I_s = renta periódica,
i_a = tipo de rentabilidad esperada,
i_n = tipo de rentabilidad según el momento de amortización o venta,
t = tanto de interés de valoración del inversor.

9.6.1. Compra por suscripción y mantenimiento del título hasta su amortización

El inversor, suscribe el título en función de la rentabilidad esperada al tanto i_a, pero al ser aleatoria la duración, el rendimiento que efectivamente se alcance i_n, sólo se conocerá en el momento de la amortización.

La decisión de compra se tomará si $i_a \geq t$, ya que t refleja la rentabilidad mínima que exige el inversor.

Si el título se amortiza en el año n y el pago de los intereses es periódico y proporciona un rendimiento i_n, en términos generales,

$$V_0 = \frac{I_1}{(1+i_n)} + \frac{I_2}{(1+i_n)^2} + \frac{I_3}{(1+i_n)^3} + \cdots + \frac{I_n + C_n}{(1+i)^n}$$

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} \frac{I_s}{(1+i_n)^s} + \frac{C_n}{(1+i_n)^n}$$

expresión, que es la suma de una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{(1+i_n)}$ y por tanto,

$$V_0 = I\,\frac{1-(1+i_n)^{-n}}{i_n} + \frac{C_n}{(1+i_n)^n}$$

que tal como vimos en (5.1) en la página 59, podemos escribir como,

$$V_0 = I\,a_{\overline{n}|i_n} + C_n(1+i_n)^{-n} \tag{9.1}$$

Si no hay intereses periódicos, es decir, $I_s = 0$

$$V_0 = C_n(1+i_n)^{-n}$$

Ejemplo 9.2 Se emite a la par un empréstito por títulos de nominal 1 000 € para ser amortizado en 5 años con anualidades constantes, abonando intereses anuales de 125 €. Si los títulos se amortizan a 1 050 €, determinar: 1) ¿Interesa la inversión a un ahorrador que pretende obtener una rentabilidad media del 13,25 %?; 2) ¿Cuál es la rentabilidad que proporciona el empréstito?

1. $$i' = \frac{R}{V} = \frac{125}{1\,050} = 0,119048$$

   $$V = (C+P)\frac{a_{\overline{n}|t}}{a_{\overline{n}|i'}} \qquad V = 1\,050\,\frac{a_{\overline{5}|0,1325}}{a_{\overline{5}|0,119048}} = 1\,015,88$$

   Como el valor de emisión $C = 1\,000$, le interesa la inversión.

2. $$a_{\overline{n}|i_a} = \frac{C}{C+P}\,a_{\overline{n}|i'} \qquad a_{\overline{5}|i_a} = \frac{1\,000}{1\,050}\,a_{\overline{5}|0,119048} = 3,441236$$

   que tiene por solución un $i_a = 13,90\,\% > t = 13,25\,\%$.

9.6.2. Compra por suscripción y venta del título en el mercado

Si el suscriptor vende la obligación en el mercado al inicio del año $s+1$ al precio V; el rendimiento t_e, se obtendrá de la siguiente ecuación cuando los intereses son periódicos:

$$V = I\,a_{\overline{s}|t_e} + V_s(1+t_s)^{-s} \tag{9.2}$$

o si se acumulan al final, $I_s = 0$:

$$V = V_s(1+t_e)^{-s} \qquad t_e = \left(\frac{V_s}{V}\right)^{\frac{1}{s}} - 1$$

Cabe indicar que el inversor habrá decidido vender porque el precio V es superior a su valor teórico $\mathcal{V}$.

Ejemplo 9.3 Si al principio del año 4 los títulos del ejemplo anterior 9.2 cotizan a 1 075 € determinar si interesa la venta si se evalúa al 13,25 % ¿Cuál será la rentabilidad obtenida por el vendedor si adquirió su título por suscripción?

$$V_3 = 1\,050\,\frac{a_{\overline{2}|0\,,1325}}{a_{\overline{2}|0\,,119048}} = 1\,031,71$$

$1\,031,71 < 1\,075$, por tanto, interesa la venta.

$$1\,000 = 125\,a_{\overline{3}|t_e} + 1\,075(1+t_e)^{-3} \qquad t_e = 14,63\,\%$$

9.6.3. Compra en el mercado y mantenimiento del título hasta su amortización

En este caso, la obligación se amortiza $n-s$ años después de su adquisición, siendo por tanto el rendimiento:

$$V = I\,a_{\overline{n-s}|i_n} + C_n(1+i_n)^{-(n-s)} \tag{9.3}$$

y si los intereses $I_s = 0$,

$$V_s = C_n(1+i_n)^{-(n-s)} \qquad i_n = \left(\frac{C_n}{V_s}\right)^{\frac{1}{n-s}} - 1$$

Debe entenderse que la decisión de compra al precio V_s se produce por ser $\mathcal{V}_s$ al tanto t superior al precio de cotización.

Ejemplo 9.4 De una emisión realizada hace tres años de 2 500 € nominales para ser amortizados el octavo o décimo año a voluntad del inversor al 12 % y una prima al décimo año de 200 €, que cotizan a 3 550 € determinar la rentabilidad de un comprador según el momento que decida.

$$C_8 = 2\,500\,(1+0,12)^8 = 6\,189,91$$
$$C_{10} = 2\,500\,(1+0,12)^{10} + 200 = 7\,964,62$$

Si la compra es a 3 550 €, ofrece rentabilidad siguiente,

$$3\,550 = 6\,189,91\,(1+i_n)^{-5} \qquad i_n = 0,1176$$
$$3\,550 = 7\,964,62\,(1+i_n)^{-7} \qquad i_n = 0,1224$$

9.6.4. Compra en el mercado y venta en el mercado

En este caso, las ecuaciones serán análogas a (9.3), sustituyendo C_n por V_n.

$$V_s = I\,a_{\overline{n-s}|t_e} + V_n(1+t_e)^{-(n-s)} \tag{9.4}$$

y si $I_s = 0$,

$$V_s = V_n(1+t_e)^{-(n-s)} \qquad t_e = \left(\frac{V_n}{V_s}\right)^{\frac{1}{n-s}} - 1$$

9.7. Valoración de las acciones

Los métodos más comunes para la valoración de las acciones, son:

Valoración a partir del activo neto

Consiste en calcular el valor de la acción como:

$$\frac{\text{Activo neto total}}{\text{Número de acciones en circulación}}$$

En la práctica, el activo contable ofrecido por el balance de la empresa no refleja el verdadero valor del negocio. Será preciso el ajuste al verdadero valor de la empresa lo que conduce al *activo neto intrínseco*.

No obstante, las cotizaciones del valor en Bolsa son diferentes a las correspondientes al valor intrínseco del activo. En ella, los inversores tienen en cuenta la capacidad de obtener beneficios que en parte se manifiesta por los dividendos repartidos a los accionistas.

Valoración en función de los dividendos

Los ingresos monetarios generados por una acción, provienen de los dividendos y del precio de venta en el momento de la enajenación.

Los dividendos no reflejan directamente los beneficios de la empresa y ello, repercute directamente en la cotización de la acción. Predecir los dividendos y la cotización requiere un conocimiento de la gestión interna de la empresa así como de la reacción de los inversores. Cabe considerar igualmente los dividendos constantes o crecientes.

Valoración en función de los beneficios

Otro criterio es la evaluación de las acciones en función de los beneficios. Una parte de estos es distribuida en forma de dividendos, mientras que el resto se detrae como reservas. Estas, repercutirán de forma favorable en la cotización bursátil del título.

El valor de la acción es la suma de los valores actuales de los beneficios futuros.

Valoración a través de modelos de regresión

La evaluación de las acciones a través de la regresión, es decir, de un modelo que exprese la correlación entre el valor y una serie de magnitudes que caracterizan a la sociedad.

9.7.1. Valoración en función de los dividendos

La nomenclatura de las variables a considerar es:

A_s = valor de la acción al inicio del año $s+1$,
$\overline{A}_s$ = valor estimado para la acción al inicio del año $s+1$,
C = valor nominal de la acción,
D_s = dividendo esperado por acción al final de año s,
i = tipo de interés,
i_a = tanto de rentabilidad (efectivo) de acuerdo con su cotización.

El *valor teórico de la acción* o valor actualizado de los dividendos esperados al tanto i, es:

$$\overline{A}_0 = \sum_{s=1}^{\infty} D_s \, (1+i)^{-s} \tag{9.5}$$

El inversor, decidirá comprar si $\overline{A}_0 > A_0$, esto es, $\overline{A}_0 - A_0 > 0$, ya que de ese modo obtendrá plusvalías. Venderá si $\overline{A}_0 < A_0$, por lo que $\overline{A}_0 - A_0 < 0$; y le resultará indiferente si $\overline{A}_0 = A_0$, siendo $\overline{A}_0 - A_0 = 0$.

La obtención del *tanto de rentabilidad* i_a, será a partir de la ecuación:

$$A_0 = \sum_{s=1}^{\infty} D_s \, (1+i_a)^{-s} \tag{9.6}$$

Y la decisión en consecuencia, será: comprar si $i < i_a$, vender si $i > i_a$ e indiferencia si $i = i_a$.

Dividendos constantes

Se caracteriza por ser $D_1 = D_2 = \cdots = D_n$ y por tanto el valor teórico de cotización, será:

$$\overline{A}_0 = D \, a_{\overline{\infty}|i} = D \, \frac{1}{i} \tag{9.7}$$

El tanto de rendimiento,

$$A_0 = D \, a_{\overline{\infty}|i_a} = D \, \frac{1}{i_a}$$

$$i_a = \frac{D}{A_0} \tag{9.8}$$

La relación cotización dividendo o número de unidades que hay que invertir para obtener una unidad o dividendo se denomina PER $= p$ (*price earning ratio*):

$$\text{PER} = p = \frac{A_0}{D} = \frac{1}{i_a} \tag{9.9}$$

que es una forma de medir la rentabilidad de los títulos, ya que representa el número de años que han de transcurrir hasta recuperar el precio A_0 invertido en el título con los rendimientos obtenidos. Si los dividendos D_s no son constantes, el PER se puede obtener como:

$$A_0 = \sum_{s=1}^{p} D_s$$

Un PER bajo respecto de otras acciones del sector indica que esa acción está barata y quizás sea un buen momento para invertir. Un PER elevado no siempre significa que su valor esté alto; en ocasiones muestra las buenas expectativas de la empresa.

Ejemplo 9.5 Una acción de 6 € nominales, cotiza a 4,55 €. Si los dividendos que se perciben son de 0,45 € anuales, determinar: 1) El valor teórico de la acción si se toma como tanto de valoración $i = 12\,\%$; 2) El tanto de rendimiento esperado de acuerdo con su cotización; 3) Valor del PER.

1.
$$\overline{A}_0 = 0,45\, a_{\overline{\infty}|0,12} = 0,45\,\frac{1}{0,12} = 3,75$$

2.
$$i_a = \frac{D}{A_0} = \frac{0,45}{4,55} = 0,0989$$

3.
$$\text{PER} = p = \frac{A_0}{D} = \frac{4,55}{0,45} = 10,11$$

9.7.2. Valoración en función de los beneficios

Si designamos B a los beneficios proporcionados por la acción en el año s, que estarán formados por los dividendos más las variaciones de cotización del título, podemos determinar el *valor teórico de la acción* $\overline{A}_0$, en función de los beneficios esperados al tanto i^*, como:

$$\overline{A}_0 = \sum_{s=1}^{\infty} B_s\,(1+i^*)^{-s} = \sum_{s=1}^{\infty} D_s\,(1+i^*)^{-s} + \sum_{s=1}^{\infty} \triangle A_s (1+i_s^*)^{-s} \qquad (9.10)$$

y el *tanto de rendimiento* i_a^* se determinará como:

$$A_0 = \sum_{s=1}^{\infty} B_s\,(1+i_a^*)^{-s} \qquad (9.11)$$

análogo al método expuesto en los dividendos en (9.6) sin más que sustituir estos por los beneficios.

Beneficios constantes

El valor teórico de la acción es:

$$\overline{A}_0 = B\, a_{\overline{\infty}|i^*} = B\,\frac{1}{i^*} \qquad (9.12)$$

y del valor obtenido en (9.10), se sigue:

$$\overline{A}_0 = \frac{B}{i^*} = \frac{D}{i} \qquad i^* = \frac{D+\triangle A}{\overline{A}_0} = i + \frac{\triangle A}{\overline{A}_0} \qquad (9.13)$$

y el tanto de rendimiento i^*,

$$A_0 = B\, a_{\overline{\infty}|i_a^*} = B\,\frac{1}{i_a^*} \qquad (9.14)$$

siendo los valores teóricos y de cotización próximos. La relación $\dfrac{\triangle A}{A_0} = \dfrac{\triangle A}{\overline{A}_0} = q^*$, recogerá la tasa de variación de la cotización, dándose la relación,

$$i^* = i + q^* \qquad I_a^* = i_a + q^*$$

El valor del PER es,

$$\text{PER} = p^* = \frac{A_0}{B} = \frac{1}{i_a^*}$$

verificándose la relación,

$$\frac{p^*}{p} = \frac{i_a}{i_a^*} \qquad p^* = p\,\frac{i_a}{i_a+q^*} \qquad p = p^*\,\frac{i_a+q^*}{i_a} \qquad (9.15)$$

Ejemplo 9.6 De un título que cotiza a 7,50 € del nominal de 6 €, se sabe que proporciona unos beneficios constantes del 20 % de su valora nominal y se reparte en concepto de dividendos el 75 % de los beneficios. Determinar su rentabilidad efectiva según sus beneficios y sus relaciones con la obtenida de sus dividendos.

$$A_0 = B\,\frac{1}{i_a} \qquad 7,50 = 1,50\,\frac{1}{i_a^*} \qquad i_a^* = \frac{1,50}{7,50} = 0,20$$

$$7,50 = 1,50 \cdot 0,75\,\frac{1}{i_a} \qquad i_a = \frac{1,1250}{7,50} = 0,15$$

$$p^* = \frac{7,50}{1,50} = 5 \qquad p = 5\,\frac{0,20}{0,15} = 6,6667$$

9.8. Valoración de las letras financieras

Las letras financieras suponen un método de financiación importante para las entidades financieras y la administración que cuenta con una buena acogida por los inversores debido a su atractiva rentabilidad, seguridad y liquidez. Se emiten al descuento, y proporcionan tipos de interés que suelen sobrepasar a los ofrecidos en las emisiones normales de títulos.

Desde el punto de vista fiscal, la tributación se hace por rendimiento de capital mobiliario, no estando sujeta a retención.

Las notaciones a emplear, son las siguientes:

C_0	=	valor inicial o precio efectivo de la letra en el momento de su contratación inicial,
C	=	valor nominal del efecto el día de su vencimiento,
n	=	duración,
C_s	=	valor del título en el momento s,
d	=	tanto de descuento,
i	=	tipo de interés equivalente a al tanto d,
i_v	=	tipo de interés del vendedor en el momento s,
i_c	=	tipo de interés del comprador en el momento s

9.8.1. Adquisición inicial de la letra y mantenimiento del título hasta su vencimiento

El inversor adquiere una letra en función de la rentabilidad que puede proporcionarle, es decir, en función de i_a.

Si el tanto de descuento es d, por un título de valor C, que vence dentro de n días, será preciso abonar el valor C_0, que tal como vimos en (2.9) de la página 11:

$$C_0 = C\,\left(1 - d\,\frac{n}{365}\right) \tag{9.16}$$

En consecuencia, i obtenido en función de d,

$$i = \frac{d}{1 - d\,\dfrac{n}{365}}$$

El parámetro i_a es el de decisión y este lo obtenemos de la relación:

$$\left(1 + i_a\,\frac{n}{365}\right)\,\left(1 - d_a\,\frac{n}{365}\right) = 1$$

de donde d_a e i_a, serán según vimos en (2.18),

$$d_a = \frac{i_a}{1 + i_a\,\dfrac{n}{365}} \qquad i_a = \frac{d_a}{1 - d_a\,\dfrac{n}{365}} \tag{9.17}$$

Ejemplo 9.7 Determinar el precio efectivo que un inversor estará dispuesto a pagar por una letra, de 1 000 € que se emite a 180 días si pretende obtener como mínimo una rentabilidad del 4 % anual.

$$d_a = \frac{i_a}{1 + i_a \dfrac{n}{365}} = \frac{0,04}{1 + 0,04 \dfrac{180}{365}} = 0,039226$$
$$C_0 = 1\,000 \left(1 - 0,039226 \frac{180}{365}\right) = 980,65$$

que será el máximo valor a pagar para obtener la rentabilidad del 4 %

9.8.2. Adquisición inicial y venta en el mercado secundario

Una vez hayan transcurrido s días desde su contratación inicial y al tanto de descuento d' vigente en el día, el efectivo que se obtiene lo denominaremos C_s, tal que:

$$C_s = C \left(1 - d' \frac{n - s}{365}\right) \tag{9.18}$$

obteniendo el vendedor una rentabilidad i_v:

$$C_0 \left(1 + i_v \frac{s}{365}\right) = C_s \qquad i_v = \frac{C_s - C_0}{C_0} \frac{365}{s}$$

Si el inversor ha decidido vender es porque el tanto de descuento $d' < d_a$.

Ejemplo 9.8 Si transcurridos 45 días el título del ejemplo anterior 9.7 cotiza a 985 € ¿Cuál será el tanto de descuento que se está practicando en el mercado y la rentabilidad que obtendría por letra el contratante inicial si decide vender al precio de cotización?

$$985 = 1\,000 \left(1 - d' \frac{180 - 45}{365}\right)$$
$$d' = \frac{C - C_s}{C} \frac{365}{n - s} = \frac{1\,000 - 985}{1\,000} \frac{365}{135} = 0,040556$$
$$i_v = \frac{C_s - C_0}{C_0} \frac{365}{s} = \frac{985 - 980,65}{980,65} \frac{365}{45} = 0,035980$$

La rentabilidad sería $i_v = 3,60\,\%$

■

9.8.3. Adquisición de la letra en el mercado secundario

El comprador en el mercado al precio C_s, cuando han transcurrido s días puede obtener, si espera a su vencimiento una rentabilidad i_c:

$$C_s = \left(1 + i_c \frac{n - s}{365}\right) = C \qquad i_c = \frac{C - C_s}{C - s} \frac{365}{n - s}$$

Sustituyendo $C - S$ por el valor en (9.18)

$$C \left(1 - d' \frac{n - s}{365}\right) \left(1 + i_c \frac{n - s}{365}\right) = C \qquad i_c = \frac{d'}{1 - d' \dfrac{n - s}{365}}$$

Si el comprador del título en el momento s decide venderlo k días después al precio C_{s+k}, obtendrá una rentabilidad i_v tal que:

$$C_s \left(1 + i_v \frac{k}{365}\right) = C_{s+k} \qquad i_v = \frac{C_{s+n} - C_s}{C} \frac{365}{k}$$

Ejemplo 9.9 Una letra de 1 000 € nominales, emitida a un año se adquiere en el mercado secundario a los 150 días al tanto de descuento del 8 %. Transcurridos 100 días se vende al 7 %. ¿Cuál será el precio de venta y los intereses efectivos obtenidos?

$$C_s = C\left(1 - d\,\frac{n-s}{365}\right) = 1\,000\left(1 - 0,08\,\frac{365-150}{365}\right) = 952,87$$

$$C_{s+k}\left(1 + i_v\,\frac{k}{365}\right) = 1\,000\left(1 - 0,07\,\frac{365-150-100}{365}\right) = 977,94$$

$$C_s\left(1 + i_v\,\frac{k}{365}\right) = C_{s+k} \qquad i_v = \frac{C_{s+k} - C_s}{C_s}\,\frac{365}{k}$$

$$i_v = \frac{977,94 - 952,87}{952,87}\,\frac{365}{100} = 0,0961$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 9.1 Una acción de 10 € nominales cotiza a 12,5 €. Si los dividiendos anuales son de 1,2 €, determinar 1) Valor del PER, 2) Rendimiento esperado de acuerdo con su cotización.

Solución: 1. $d = 10,42$ 2. $i_a = 0,0960$

Ejercicio 9.2 ¿Cuál es la rentabilidd de un título de 500 € emitido a 4 años que paga cupones anuales de 60 € si la amortización se hace por 550 €?

Solución: $i_a = 0,0283$

Ejercicio 9.3 Determinar el precio máximo por el que se adquirirá una letra de 1 000 € que se emite a 1 año si se pretende obtener una rentabilidad mínima del 4,5 %

Solución: $V_0 = 956,94$

Ejercicio 9.4 Una letra emitida con un nominal de 1 000 € a un año y un interés del 4,5 % cotiza a 962 € 60 días después. ¿Cuál será la tasa de descuento que está practicando el mercado y el interés si se decide vender a ese precio?

Solución: $d' = 0,0431$ $i_a = 0,0322$

Ejercicio 9.5 Se adquiere un título en el mercado en una emisión hecha 4 años antes de 1 000 € nominales con amortización el quinto o séptimo año al 6 % y una prima de emisión de 50 €. En la actualidad, la cotización del título es de 1 250 €. Determinar la rentabilidad obtenida por un comprador en ambos supuestos.

Solución: $i_1 = 0,0706$ $i_2 = 0,0752$

Ejercicio 9.6 Un acción de 6 € cotiza a 9,25 €. Si ofrece un dividendo de 0,40 € anuales, determinar el rendimiento esperado por su cotización y el PER.

Solución: $i_a = 0,0432$ PER $= 23,13$

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 9.1

1. Para calcular p,
$$p = \frac{A_0}{D} \quad p = \frac{12,5}{1,2} \quad p = 10,42$$
2. Calculamos i_a,
$$i_a = \frac{D}{A_0} \quad i_a = \frac{1,2}{12,5} \quad i_a = 0,0960 = 9,60\,\%$$

A

Introducción matemática

A.1. Razones y proporciones
- A.1.1. Razones
- A.1.2. Proporciones

A.2. Porcentajes

A.3. Logaritmos decimales

A.4. Interpolación lineal

A.5. Progresiones aritméticas
- A.5.1. Suma de términos equidistantes de los extremos
- A.5.2. Término medio
- A.5.3. Suma de los términos de una progresión aritmética limitada

A.6. Progresiones geométricas
- A.6.1. Producto de dos términos equidistantes de los extremos
- A.6.2. Término medio
- A.6.3. Producto de los términos de una progresión geométrica limitada
- A.6.4. Suma de los términos de una progresión geométrica limitada

A.7. Resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas
- A.7.1. Método de sustitución
- A.7.2. Método de reducción
- A.7.3. Método de igualación

A.8. Resolución de ecuaciones lineales con tres incógnitas
- A.8.1. Método de reducción
- A.8.2. Método de sustitución

A.9. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Como anexo al estudio de las operaciones financieras, se exponen aquí aquellos conceptos y operaciones matemáticas precisos para las distintas unidades.

Este estudio, no pretende ser exhaustivo, sino orientativo para el análisis de las matemáticas financieras.

A.1. Razones y proporciones

A.1.1. Razones

Se llama razón de dos números al cociente del primero por el segundo. La razón de dos números a y b se escribe en forma de fracción $\frac{a}{b}$, donde el primer número a o numerador (antecedente) y el segundo o denominador b (consecuente).

Ejemplo A.1 La razón de 5 a 7, es: $\frac{5}{7}$

Propiedades de las razones:

1. Sean las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$:
   - *a*) Si $b = d$, la mayor fracción es la que tiene mayor numerador,
   - *b*) Si $a = c$, la mayor fracción es la que tiene menor denominador,
   - *c*) Si se multiplica o divide el numerador de una fracción por un número, la fracción queda multiplicada o dividida por el mismo número.
   - *d*) Si se multiplica o divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número la fracción no varía.

Se llama *número mixto* a un número compuesto de entero y fracción. Para convertirlo en fracción, se toma por numerador el resultado de multiplicar el denominador por la parte entera y sumarle el numerador, tomando como denominador el denominador de la fracción.

Ejemplo A.2 Dado el número mixto $4\ \frac{2}{5}$, determinar la fracción:

$$\frac{4 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{22}{5}$$

Operaciones

Para reducir las fracciones, lo haremos al mínimo común denominador, y para ello seguiremos los pasos siguientes:

1. Se simplifican a su más simple expresión,
2. Se calcula el mínimo común múltiplo (*mcm*) de los denominadores. Para ello, se descomponen en sus factores primos. El *mcm* será el producto de todos los factores de los números dados afectados del mayor exponente,
3. Se divide el *mcm* por el denominador de cada fracción multiplicando ambos términos por el cociente obtenido.

Ejemplo A.3 Reducir al mínimo común denominador las fracciones siguientes: $\frac{5}{12}, \frac{7}{50}, \frac{9}{24}$ y $\frac{11}{30}$

El denominador común, será el *mcm* de 12, 24, 30 y 50.

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 50 = 2 \cdot 5^2 \end{array}\right\} mcm = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600 \qquad \frac{600}{12} = 50; \frac{600}{24} = 25; \frac{600}{30} = 20; \frac{600}{50} = 12$$

la fracción, quedará reducida así:

$$\frac{5 \cdot 50}{12 \cdot 50} = \frac{250}{600};\ \frac{7 \cdot 12}{50 \cdot 12} = \frac{84}{600};\ \frac{9 \cdot 25}{24 \cdot 25} = \frac{225}{600};\ \frac{11 \cdot 20}{30 \cdot 20} = \frac{220}{600}$$

1. *La suma de fracciones con igual denominador*, es otra fracción que tiene el mismo denominador y el numerador es la suma de los numeradores:

$$\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \frac{a_3}{b} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b}$$

2. *La suma de fracciones con distinto denominador*, se convierte en el caso anterior al obtener previamente el *mcm*.

3. En la *suma de números mixtos*, se suman por un lado las partes enteras y por otro las fracciones del siguiente modo:

$$A_1 \frac{a_1}{b_1} + A_2 \frac{a_2}{b_2} = A \frac{a}{b}, \text{ siendo}$$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a}{b};\ \text{y}\ A_1 + A_2 = A$$

4. En *la resta de fracciones* es válido todo lo dicho anteriormente para la suma, con la salvedad de sustituir el signo más + por el signo menos −.

5. *La multiplicación de un entero por una fracción* es el producto del entero por el numerador como nuevo numerador siendo el denominador el mismo:

$$A \frac{a}{b} = \frac{A \cdot a}{b}$$

6. *La multiplicación de fracciones* es la multiplicación de los numeradores y los denominadores tomando los resultados obtenidos como numerador y denominador respectivamente la fracción producto:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}$$

7. *La división de un número entero por una fracción* es la multiplicación del número entero por el denominador de la fracción como numerador y el denominador el mismo:

$$A : \frac{a}{b} = \frac{A \cdot b}{a}$$

8. *La división de dos fracciones* es el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda como numerador de la nueva fracción y el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda como denominador de la nueva fracción:

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$$

A.1.2. Proporciones

Se llama proporción a la igualdad de dos razones. Si representamos por $\frac{a}{b}$ una razón y por $\frac{c}{d}$ otra, estas dos razones formarán una proporción, cuando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

en la que a los términos a y d se les llama extremos, y a los términos b y c medios.

A.2. Porcentajes

Se define el tanto por cuanto de una cantidad, como otra cantidad que guarda con la primera la misma relación que el tanto con el cuanto.

Así decimos el 3 por 75, el 2 por 80, el 3 por 100, el 1,5 por 1 000, etc. Los más usados son el tanto por ciento (3 %) y el tanto por mil (1,5‰).

Para hallar el tanto por cuanto de una cantidad, se la multiplica por el tanto y se la divide por el cuanto. ∎

Ejemplo A.4 El 3 por 75 de 1 500, es: $\frac{1\,500 \cdot 3}{75} = 60$

A.3. Logaritmos decimales

Se llama logaritmo decimal de un número, al exponente a que debe elevarse la base, que en los logaritmos decimales es 10, para obtener una potencia igual al número dado.

Ejemplo A.5 $1000 = 10^3$, por tanto, 3 es el logaritmo decimal de 1 000 que se expresa en la forma *log* $1\,000 = 3$

1. Propiedades de los logaritmos

   a) En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1 y el logaritmo de la unidad es 0.

   b) Los logaritmos de los números mayores que la unidad son positivos, y al crecer indefinidamente el número, crece también indefinidamente su logaritmo.

   c) Los logaritmos de los números positivos menores que la unidad, son negativos, y al aproximarse el número a cero, se aproxima su logaritmo a $-\infty$.

   d) Los números negativos carecen de logaritmo real, se dice que tienen logaritmo imaginario.

2. Logaritmo de un producto

   El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

   $$\log a \cdot b \cdot c = \log a + \log b + \log c$$

3. Logaritmo de un cociente

   El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

4. Logaritmo de una potencia

   El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia.

$$\log a^n = n \ \log a$$

5. Logaritmo de una raíz

   El logaritmo de la raíz de un número se obtiene dividiendo el logaritmo del radicando por el índice de la raíz.

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$$

   e igualmente, convirtiéndolo en una potencia,

$$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = n \ \log a$$

6. Definición de característica y mantisa

   La parte entera de un logaritmo se llama característica y la parte decimal, mantisa.

   Ejemplo A.6 $\log 640 = 2,80618$; la característica es 2 y la mantisa 0,80618

A.4. Interpolación lineal

La interpolación lineal es un caso particular de la interpolación general de Newton.

Con el polinomio de interpolación de Newton se logra aproximar un valor de la función $f(x)$ para un valor desconocido de x. Un caso particular, para que una interpolación sea lineal es en el que se utiliza un polinomio de interpolación de grado uno.

Para el cálculo de la variable i a partir de la expresión correspondiente al valor actual (o final) de una renta:

$$V_0 = c \ a_{\overline{n}|i}$$

en donde, $a_{\overline{n}|i}$, (véase 5.1 en la página 59) es,

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

y puesto que no es posible obtener de forma explícita el valor de i, podemos utilizar la interpolación lineal como aproximación.

Por las tablas financieras sabemos que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ y queremos conocer x para un valor de $y = f(x)$, siendo $x_1 < x < x_2$.

La interpolación lineal consiste en trazar una recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y calcular los valores intermedios según esta recta en lugar de la función $y = f(x)$.

$$\frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)} = \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \tag{A.1}$$

despejando x,

$$x = \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)}(x_2 - x_1) + x_1 \tag{A.2}$$

expresión que permite obtener el valor aproximado de x. ■

Ejemplo A.7 Dado el valor de $a_{\overline{10}|0,05} = 7,721735$ y el correspondiente a $a_{\overline{10}|0,06} = 7,360087$, obtener el tipo i al que corresponde un valor de $a_{\overline{10}|i} = 7,448054$.

En este caso, aplicando la interpolación lineal,

$$\frac{7,448054 - 7,721735}{7,360087 - 7,721735} = \frac{x - 0,05}{0,06 - 0,05}$$

en la que despejando x, utilizando (A.2), obtenemos:

$$x = 0,05756761$$

valor aproximado al real de $x = 0,05750042$

A.5. Progresiones aritméticas

Se entiende por progresión, un conjunto de números que aparecen ordenados y que generalmente se obtienen unos de otros en virtud de una ley constante.

Progresión aritmética, es una sucesión, limitada o ilimitada de números, tales que cada uno es igual al anterior variando en una cantidad constante llamada *razón* o diferencia de la progresión.

Si la diferencia o razón es positiva, los términos van aumentando y se llama progresión creciente; si la diferencia es negativa, los términos van disminuyendo y la progresión se dice que es decreciente.

De la definición se deduce que si la sucesión,

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$$

es una progresión artimética de razón d y se verifica:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d = a_1 + (n-2)d \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

En las progresiones aritméticas, un término cualquiera es igual al primero más tantas veces la razón como términos le preceden. En general,

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{A.3}$$

■

Ejemplo A.8 Dada la progresión aritmética $5, 7, 9, \cdots$ calcular el término vigésimo.

La razón de la progresión, será $d = a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2$,

$$a_{20} = 5 + (20 - 1)\ 2 = 43$$

A.5.1. Suma de términos equidistantes de los extremos

La suma de dos términos equidistantes de los extremos, es constante e igual a la suma de éstos últimos.

Dos términos equidistan de los extremos de una progresión, cuando a uno de ellos le preceden tantos términos como siguen al otro.

Ejemplo A.9 Dada la progresión aritmética $4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$,

La suma de los extremos, es $4 + 25 = 29$, y la de los términos equidistantes también, pues $7 + 22 = 29$, $10 + 19 = 29$

A.5.2. Término medio

Cuando el número de términos de la progresión es impar, existe un término a_{p+1}, el término medio, que es equidistante de si mismo y cumple que:

$$a_{p+1} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

El término medio es igual a la semisuma de los extremos.

A.5.3. Suma de los términos de una progresión aritmética limitada

Dada la progresión aritmética:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

representando por S la suma de todos los términos de la misma, tendremos,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{A.4}$$

o bien,

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \tag{A.5}$$

sumando ordenadamente (A.4) y (A.5) resulta:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Cada uno de estos pares es suma de términos equidistantes de los extremos, luego todos ellos son iguales a la suma $a_1 + a_n$ de los extremos, o sea:

$$2S = (a_1 + a_n)n, \qquad \text{de donde:} \qquad S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

La suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los extremos multiplicada por el número de términos.

Ejemplo A.10 Hallar la suma de los términos de la progresión 1, 6, 11, 16, ..., compuesta por 51 términos.

La razón, es: $a_2 - a_1 = 6 - 1 = 5$. El último término, será: $a_{51} = 1 + (51 - 1)\ 5 = 251$

La suma, será: $S = \dfrac{1 + 251}{2}\ 51 = 6\,426$

A.6. Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión limitada o ilimitada de términos, tales, que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón de la progresión.

Cuando el primer término es positivo y la razón mayor que la unidad, cada término es mayor que el anterior y la progresión se llama creciente.

Si la razón es menor que la unidad, pero positiva, cada término es menor que el anterior, y la progresión se llama decreciente.

Dada la progresión geométrica,

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$$

por definición, el segundo término a_2 es igual al primero a_1 multiplicado por la razón q, por tanto,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

en toda progresión geométrica, un término cualquiera es igual al primero multiplicado por la razón elevada al número de términos que le preceden. En general,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{A.6}$$

■

Ejemplo A.11 Dada la progresión geométrica 8, 16, 32, ..., calcular el séptimo término.

La razón, será:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{16}{8} = 2$$

y

$$a_7 = 8 \cdot 2^6 = 512$$

A.6.1. Producto de dos términos equidistantes de los extremos

En toda progresión geométrica, el producto de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de estos extremos.

Ejemplo A.12 Dada la progresión geométrica $2, 4, 8, 16, 32, 64$, el producto de los extremos, es $2 \cdot 64 = 128$, y el de los términos equidistantes, es $4 \cdot 32 = 128$ y $8 \cdot 16 = 128$.

A.6.2. Término medio

Cuando la progresión geométrica limitada tiene un número impar de términos, hay uno, que equidista consigo mismo de los extremos y cumple que:

$$h^2 = a_1 \cdot a_n$$

de donde,

$$h = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$$

El término medio es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

A.6.3. Producto de los términos de una progresión geométrica limitada

Dada la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n_1}, a_n$

si llamamos P al producto de sus n primeros términos,

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \tag{A.7}$$

o bien:

$$P = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \tag{A.8}$$

Multiplicando estas dos expresiones (A.7) y (A.8) y agrupando cada término con el que tiene debajo,

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n)(a_2 \cdot a_{n-1})(a_3 \cdot a_{n-2}) \cdots (a_{n-2} \cdot a_3)(a_{n-1} \cdot a_2)(a_n \cdot a_1)$$

cada uno de estos paréntesis es producto de términos equidistantes de los extremos; luego todos ellos son iguales al producto de $a_1 \cdot a_n$, de los extremos y como hay n paréntesis,

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n)^n, \qquad \text{de donde:} \qquad P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

El producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada de la potencia n-esima del producto de los extremos. ∎

A.6.4. Suma de los términos de una progresión geométrica limitada

Dada la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$

siendo S la suma de sus n primeros términos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la razón q,

$$Sq = a_1q + a_2q + a_3q + \cdots + a_{n-1}q + a_nq \tag{A.9}$$

pero por definición,

$$a_1q = a_2,\ a_2q = a_3,\ a_3q = a_4, \cdots, a_{n-1}q = a_n$$

la expresión (A.9) queda en la forma:

$$Sq = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_nq \tag{A.10}$$

si restamos de esta igualdad (A.10), la (A.9), tenemos:

$$Sq - S = a_nq - a_1 \qquad\qquad S(q-1) = a_nq - a_1$$

$$S = \frac{a_nq - a_1}{q-1} \tag{A.11}$$

La suma de los n términos consecutivos de una progresión geométrica es una fracción cuyo numerador se obtiene restando el primer término del producto del último por la razón; el denominador es la diferencia entre la razón y la unidad.

∎

Ejemplo A.13 En una progresión geométrica de razón 3, cuyos extremos son 2 y 286, se desea calcular la suma de sus términos.

$$S = \frac{286 \cdot 3 - 2}{3-1} = \frac{856}{2} = 428$$

A.7. Resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es preciso conocer antes el concepto de eliminación.

Eliminar una incógnita en un sistema de varias ecuaciones con varias incógnitas es transformarle en otro sistema equivalente, formado por el mismo número de ecuaciones menos una, que no contenga dicha incógnita.

Procedimiento que debe seguirse en el caso de dos ecuaciones:

1. Eliminar una incógnita, esto es, transformar el sistema en otro equivalente, en el que aparezca una sola de las ecuaciones con una sola incógnita.
2. Resolución de esta ecuación con una sola incógnita.
3. Sustitución de la solución obtenida en una de las ecuaciones propuestas, cuya resolución nos dará el valor de la otra incógnita.

Los procedimientos de eliminación que se emplean normalmente son tres: método de sustitución, de igualación y de reducción.

A.7.1. Método de sustitución

Para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones por este método, se procede como sigue:

- Se despeja una incógnita cualquiera, por ejemplo x, en una de las ecuaciones.
- Se sustituye su valor en la otra ecuación, obteniéndose con ello una ecuación en la que no aparece x.
- Se resuelve la ecuación en la que solo aparece la omcógnita y.
- Conocido el valor de y, se sustituye su valor en la expresión de x.

Ejemplo A.14 Resolver el sistema:

$$3x + y = 15 \tag{A.12}$$
$$5x - 4y = 8 \tag{A.13}$$

Despejamos x en (A.12), así:

$$x = \frac{15 - y}{3} \tag{A.14}$$

y sustituimos su valor en (A.13), obteniéndose la ecuación:

$$5\left(\frac{15 - y}{3}\right) - 4y = 8 \qquad 75 - 5y - 12y = 24$$

de donde $17y = 51$ y por tanto,

$$y = 3$$

sustituyendo este valor en (A.14) tendremos:

$$x = \frac{15 - 3}{3} = 4$$

Los valores $x = 4$, y $y = 3$ son la solución al sistema.

Este método es el más ventajoso cuando una de las ecuaciones permite calcular fácilmente la incógnita que se quiere eliminar.

A.7.2. Método de reducción

En este método, se empieza por reducir al mismo coeficiente la incógnita que se quiere eliminar en las dos ecuaciones, para lo cual basta multiplicar los dos miembros de cada ecuación por el valor absoluto del coeficiente de dicha incógnita en la otra ecuación u otro factor elegido convenientemente, de modo que resulte el *mcm* de los coeficientes de la incógnita.

A continuación,

- Se suman (o restan según el signo) ambas ecuaciones.
- Se despeja la incógnita de la ecuación resultante y este valor se sustituye en una de las ecuaciones primitivas para hallar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo A.15 Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 5x - y &= 5 && \text{(A.15)} \\ -2x + 3y &= 11 && \text{(A.16)} \end{aligned}$$

Para eliminar x, multiplicamos (A.15) por 2 y (A.16) por 5, con lo cual obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 10x - 2y &= 10 \\ -10x + 15y &= 55 \end{aligned}$$

que es un sistema equivalente al primitivo. Si sumamos ambas ecuaciones, resulta:

$$13y = 65 \qquad y = 5$$

Y si sustituimos este valor de y en una de las ecuaciones (A.15) o (A.16), se tendrá $5x - 5 = 5$, de donde,

$$x = 2$$

El par de valores, $x = 2$, $y = 5$ forman la solución al sistema propuesto.

A.7.3. Método de igualación

La solución de un sistema lineal de dos ecuaciones por este método se realiza del siguiente modo:

- Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- Se igualan las expresiones obtenidas para la incógnita despejada.
- Se resuelve la ecuación obtenida con una incógnita.
- El valor hallado para dicha ingógnita se lleva a una de las expresiones iguales de la otra incógnita para calcular su valor.

Ejemplo A.16 Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x - y &= -5 && \text{(A.17)} \\ 8x + 5y &= 32 && \text{(A.18)} \end{aligned}$$

Despejando x en ambas ecuaciones,

$$x = \frac{y-5}{5} \qquad x = \frac{32-5y}{8}$$

igualando estas dos expresiones del valor de x, tendremos,

$$\frac{y-5}{4} = \frac{32-5y}{8}; \qquad 8\,(y-5) = 4\,(32-5y); \qquad 8y + 20y = 128 + 40$$

de donde, $28y = 168$, y por tanto, $y = 6$ que sustituyendo en una de las ecuaciones de x,

$$x = \frac{y-5}{4} = \frac{6-5}{4} = \frac{1}{4}$$

El par de valores, $x = \frac{1}{4}$, $y = 6$ son la solución al sistema.

A.8. Resolución de ecuaciones lineales con tres incógnitas

A un sistema de ecuaciones con tres incógnitas se le puede aplicar para su resolución, los tres métodos que hemos expuesto para los sistemas con dos ecuaciones.

A.8.1. Método de reducción

Se procede como sigue:

- Se forman dos sistemas de dos ecuaciones con una de ellas y todas las demás, igualando después los coeficientes, con respecto a la incógnita que se quiere eliminar, multiplicando las ecuaciones por el número conveniente para ello.
- Se suman (o restan) los pares de ecuaciones, según los coeficientes de la incógnita que se hayan igualado tengan signo igual o contrario.
- Las dos ecuaciones resultantes forman un sistema equivalente con dos incógnitas, que se resuelve.
- Conocido un par de valores, por sustitución en cualquiera de las ecuaciones propuestas, se obtendrá el valor de la tercera incógnita.

Ejemplo A.17 Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 11 && \text{(A.19)}\\ 2x-y+z &= 5 && \text{(A.20)}\\ 3x+2y+z &= 24 && \text{(A.21)} \end{aligned}$$

Si multiplicamos (A.19) por 6, (A.20) por -3 y (A.21) por -2, resulta:

$$\begin{aligned} 6+6y+6z &= 66 && \text{(A.22)}\\ -6x+3y-3z &= -15 && \text{(A.23)}\\ -6x-4y-2z &= -48 && \text{(A.24)} \end{aligned}$$

Sumando (A.22) con cada una de las otras dos, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} 9y+3z &= 51 && \text{(A.25)}\\ 2y+4z &= 18 && \text{(A.26)} \end{aligned}$$

que resuelto por cualquiera de los métodos ya conocidos se deduce que $y = 5$, $z = 2$, y estos valores, sustituidos en una de las ecuaciones dadas, nos darán el valor $x = 4$ que son las soluciones al sistema propuesto.

A.8.2. Método de sustitución

Para resolver un sistema de tres ecuaciones por el método de sustituciñ:

- Se despeja una incógnita cualquiera en una ecuación.
- Se sustituye la expresión hallada para esta incógnita en las otras dos ecuaciones, resultando entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Se resuelve este sistema por cualquiera de los métodos conocidos.

- El par de valores hallados se sustituyen en una cualquiera de las ecuaciones primitivas para obtener el valor de la tercera incógnita.

Ejemplo A.18 Sea el sistema:

$$\begin{aligned} 5x - y + 2z &= 2 && \text{(A.27)} \\ 3y - x + z &= 15 && \text{(A.28)} \\ 3x + 2y - z &= -2 && \text{(A.29)} \end{aligned}$$

Despejando el valor de x en (A.28) (por ejemplo), tendremos:

$$x = -15 + 3y + z$$

Sustituyendo el valor de x en las otras dos ecuaciones, tendremos el sistema:

$$\begin{aligned} 5(-15 + 3y + z) - y + 2z &= 2 && \text{(A.30)} \\ 3(-15 + 3y + z) + 2y - z &= -2 && \text{(A.31)} \end{aligned}$$

que resuelto por cualquiera de los métodos ya conocidos se deduce que $y = 5$, $z = 2$, y estos valores, sustituidos en una de las ecuaciones dadas, nos darán el valor $x = 4$ que son las soluciones al sistema propuesto.

A.9. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Toda ecuación con una incógnita que pueda reducirse a la forma,

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(A.32)}$$

se dice de segundo grado en x, siendo a, b y c coeficientes numéricos o literales, positivos o negativos.

Ejemplo A.19 Sean las dos ecuaciones,

$$6x^2 - 15 = x^2 + 2x$$

$$x^3 + mx^2 + nx = 12 + 3x^2 + x^3$$

Efectuada la reducción y trasponiendo términos, tendremos las ecuaciones:

$$5x^2 - 2x - 15 = 0 \qquad \text{(A.33)}$$

$$(m - 3)\, x^2 + nx - 12 = 0 \qquad \text{(A.34)}$$

reducidas a la forma general (A.32).

La resolución de la ecuación de segundo grado, de forma $ax^2+bx+c = 0$, vendrá dada por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(A.35)}$$

Ejemplo A.20 Resolver la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

que presenta las siguientes soluciones,

$$x_1 = \frac{7 + 5}{4} = 3 \qquad x_2 = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$$

B

Tablas financieras

B.1. Factor de capitalización compuesta unitaria
B.2. Factor de descuento compuesto unitario
B.3. Valor actual de una renta unitaria
B.4. Valor final de una renta unitaria

B.1. Factor de capitalización compuesta unitaria

$$(1+i)^n$$

n	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259	3,9703	4,5950
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000	4,3276	5,0545
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960	4,7171	5,5599
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157	5,1417	6,1159
20	1,2202	1,4859	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610	5,6044	6,7275
21	1,2324	1,5157	1,8603	2,2788	2,7860	3,3996	4,1406	5,0338	6,1088	7,4002
22	1,2447	1,5460	1,9161	2,3699	2,9253	3,6035	4,4304	5,4365	6,6586	8,1403
23	1,2572	1,5769	1,9736	2,4647	3,0715	3,8197	4,7405	5,8715	7,2579	8,9543
24	1,2697	1,6084	2,0328	2,5633	3,2251	4,0489	5,0724	6,3412	7,9111	9,8497
25	1,2824	1,6406	2,0938	2,6658	3,3864	4,2919	5,4274	6,8485	8,6231	10,8347
26	1,2953	1,6734	2,1566	2,7725	3,5557	4,5494	5,8074	7,3964	9,3992	11,9182
27	1,3082	1,7069	2,2213	2,8834	3,7335	4,8223	6,2139	7,9881	10,2451	13,1100
28	1,3213	1,7410	2,2879	2,9987	3,9201	5,1117	6,6488	8,6271	11,1671	14,4210
29	1,3345	1,7758	2,3566	3,1187	4,1161	5,4184	7,1143	9,3173	12,1722	15,8631
30	1,3478	1,8114	2,4273	3,2434	4,3219	5,7435	7,6123	10,0627	13,2677	17,4494
31	1,3613	1,8476	2,5001	3,3731	4,5380	6,0881	8,1451	10,8677	14,4618	19,1943
32	1,3749	1,8845	2,5751	3,5081	4,7649	6,4534	8,7153	11,7371	15,7633	21,1138
33	1,3887	1,9222	2,6523	3,6484	5,0032	6,8406	9,3253	12,6760	17,1820	23,2252
34	1,4026	1,9607	2,7319	3,7943	5,2533	7,2510	9,9781	13,6901	18,7284	25,5477
35	1,4166	1,9999	2,8139	3,9461	5,5160	7,6861	10,6766	14,7853	20,4140	28,1024
36	1,4308	2,0399	2,8983	4,1039	5,7918	8,1473	11,4239	15,9682	22,2512	30,9127
37	1,4451	2,0807	2,9852	4,2681	6,0814	8,6361	12,2236	17,2456	24,2538	34,0039
38	1,4595	2,1223	3,0748	4,4388	6,3855	9,1543	13,0793	18,6253	26,4367	37,4043
39	1,4741	2,1647	3,1670	4,6164	6,7048	9,7035	13,9948	20,1153	28,8160	41,1448
40	1,4889	2,2080	3,2620	4,8010	7,0400	10,2857	14,9745	21,7245	31,4094	45,2593
41	1,5038	2,2522	3,3599	4,9931	7,3920	10,9029	16,0227	23,4625	34,2363	49,7852
42	1,5188	2,2972	3,4607	5,1928	7,7616	11,5570	17,1443	25,3395	37,3175	54,7637
43	1,5340	2,3432	3,5645	5,4005	8,1497	12,2505	18,3444	27,3666	40,6761	60,2401
44	1,5493	2,3901	3,6715	5,6165	8,5572	12,9855	19,6285	29,5560	44,3370	66,2641
45	1,5648	2,4379	3,7816	5,8412	8,9850	13,7646	21,0025	31,9204	48,3273	72,8905
46	1,5805	2,4866	3,8950	6,0748	9,4343	14,5905	22,4726	34,4741	52,6767	80,1795
47	1,5963	2,5363	4,0119	6,3178	9,9060	15,4659	24,0457	37,2320	57,4176	88,1975
48	1,6122	2,5871	4,1323	6,5705	10,4013	16,3939	25,7289	40,2106	62,5852	97,0172
49	1,6283	2,6388	4,2562	6,8333	10,9213	17,3775	27,5299	43,4274	68,2179	106,7190
50	1,6446	2,6916	4,3839	7,1067	11,4674	18,4202	29,4570	46,9016	74,3575	117,3909
52	1,6777	2,8003	4,6509	7,6866	12,6428	20,6969	33,7253	54,7060	88,3442	142,0429
54	1,7114	2,9135	4,9341	8,3138	13,9387	23,2550	38,6122	63,8091	104,9617	171,8719
56	1,7458	3,0312	5,2346	8,9922	15,3674	26,1293	44,2071	74,4270	124,7050	207,9651
58	1,7809	3,1536	5,5534	9,7260	16,9426	29,3589	50,6127	86,8116	148,1620	251,6377
60	1,8167	3,2810	5,8916	10,5196	18,6792	32,9877	57,9464	101,2571	176,0313	304,4816
62	1,8532	3,4136	6,2504	11,3780	20,5938	37,0650	66,3429	118,1062	209,1428	368,4228
64	1,8905	3,5515	6,6311	12,3065	22,7047	41,6462	75,9559	137,7591	248,4825	445,7916
66	1,9285	3,6950	7,0349	13,3107	25,0319	46,7937	86,9620	160,6822	295,2221	539,4078
68	1,9672	3,8443	7,4633	14,3968	27,5977	52,5774	99,5627	187,4198	350,7534	652,6834
70	2,0068	3,9996	7,9178	15,5716	30,4264	59,0759	113,9894	218,6064	416,7301	789,7470

$$(1+i)^n$$

n	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,32
1	1,1200	1,1400	1,1600	1,1800	1,2000	1,2200	1,2400	1,2600	1,2800	1,3200
2	1,2544	1,2996	1,3456	1,3924	1,4400	1,4884	1,5376	1,5876	1,6384	1,7424
3	1,4049	1,4815	1,5609	1,6430	1,7280	1,8158	1,9066	2,0004	2,0972	2,3000
4	1,5735	1,6890	1,8106	1,9388	2,0736	2,2153	2,3642	2,5205	2,6844	3,0360
5	1,7623	1,9254	2,1003	2,2878	2,4883	2,7027	2,9316	3,1758	3,4360	4,0075
6	1,9738	2,1950	2,4364	2,6996	2,9860	3,2973	3,6352	4,0015	4,3980	5,2899
7	2,2107	2,5023	2,8262	3,1855	3,5832	4,0227	4,5077	5,0419	5,6295	6,9826
8	2,4760	2,8526	3,2784	3,7589	4,2998	4,9077	5,5895	6,3528	7,2058	9,2170
9	2,7731	3,2519	3,8030	4,4355	5,1598	5,9874	6,9310	8,0045	9,2234	12,1665
10	3,1058	3,7072	4,4114	5,2338	6,1917	7,3046	8,5944	10,0857	11,8059	16,0598
11	3,4785	4,2262	5,1173	6,1759	7,4301	8,9117	10,6571	12,7080	15,1116	21,1989
12	3,8960	4,8179	5,9360	7,2876	8,9161	10,8722	13,2148	16,0120	19,3428	27,9825
13	4,3635	5,4924	6,8858	8,5994	10,6993	13,2641	16,3863	20,1752	24,7588	36,9370
14	4,8871	6,2613	7,9875	10,1472	12,8392	16,1822	20,3191	25,4207	31,6913	48,7568
15	5,4736	7,1379	9,2655	11,9737	15,4070	19,7423	25,1956	32,0301	40,5648	64,3590
16	6,1304	8,1372	10,7480	14,1290	18,4884	24,0856	31,2426	40,3579	51,9230	84,9538
17	6,8660	9,2765	12,4677	16,6722	22,1861	29,3844	38,7408	50,8510	66,4614	112,1390
18	7,6900	10,5752	14,4625	19,6733	26,6233	35,8490	48,0386	64,0722	85,0706	148,0235
19	8,6128	12,0557	16,7765	23,2144	31,9480	43,7358	59,5679	80,7310	108,8904	195,3911
20	9,6463	13,7435	19,4608	27,3930	38,3376	53,3576	73,8641	101,7211	139,3797	257,9162
21	10,8038	15,6676	22,5745	32,3238	46,0051	65,0963	91,5915	128,1685	178,4060	340,4494
22	12,1003	17,8610	26,1864	38,1421	55,2061	79,4175	113,5735	161,4924	228,3596	449,3932
23	13,5523	20,3616	30,3762	45,0076	66,2474	96,8894	140,8312	203,4804	292,3003	593,1990
24	15,1786	23,2122	35,2364	53,1090	79,4968	118,2050	174,6306	256,3853	374,1444	783,0227
25	17,0001	26,4619	40,8742	62,6686	95,3962	144,2101	216,5420	323,0454	478,9049	1 033,5900
26	19,0401	30,1666	47,4141	73,9490	114,4755	175,9364	268,5121	407,0373	612,9982	1 364,3387
27	21,3249	34,3899	55,0004	87,2598	137,3706	214,6424	332,9550	512,8670	784,6377	1 800,9271
28	23,8839	39,2045	63,8004	102,9666	164,8447	261,8637	412,8642	646,2124	1 004,3363	2 377,2238
29	26,7499	44,6931	74,0085	121,5005	197,8136	319,4737	511,9516	814,2276	1 285,5504	3 137,9354
30	29,9599	50,9502	85,8499	143,3706	237,3763	389,7579	634,8199	1 025,9267	1 645,5046	4 142,0748
31	33,5551	58,0832	99,5859	169,1774	284,8516	475,5046	787,1767	1 292,6677	2 106,2458	5 467,5387
32	37,5817	66,2148	115,5196	199,6293	341,8219	580,1156	976,0991	1 628,7613	2 695,9947	7 217,1511
33	42,0915	75,4849	134,0027	235,5625	410,1863	707,7411	1 210,3629	2 052,2392	3 450,8732	9 526,6395
34	47,1425	86,0528	155,4432	277,9638	492,2235	863,4441	1 500,8500	2 585,8215	4 417,1177	12 575,1641
35	52,7996	98,1002	180,3141	327,9973	590,6682	1 053,4018	1 861,0540	3 258,1350	5 653,9106	16 599,2166
36	59,1356	111,8342	209,1643	387,0368	708,8019	1 285,1502	2 307,7070	4 105,2501	7 237,0056	21 910,9659
37	66,2318	127,4910	242,6306	456,7034	850,5622	1 567,8833	2 861,5567	5 172,6152	9 263,3671	28 922,4750
38	74,1797	145,3397	281,4515	538,9100	1 020,6747	1 912,8176	3 548,3303	6 517,4951	11 857,1099	38 177,6670
39	83,0812	165,6873	326,4838	635,9139	1 224,8096	2 333,6375	4 399,9295	8 212,0438	15 177,1007	50 394,5205
40	93,0510	188,8835	378,7212	750,3783	1 469,7716	2 847,0378	5 455,9126	10 347,1752	19 426,6889	66 520,7670
41	104,2171	215,3272	439,3165	885,4464	1 763,7259	3 473,3861	6 765,3317	13 037,4408	24 866,1618	87 807,4125
42	116,7231	245,4730	509,6072	1 044,8268	2 116,4711	4 237,5310	8 389,0113	16 427,1754	31 828,6871	*
43	130,7299	279,8392	591,1443	1 232,8956	2 539,7653	5 169,7878	10 402,3740	20 698,2410	40 740,7195	*
44	146,4175	319,0167	685,7274	1 454,8168	3 047,7183	6 307,1411	12 898,9437	26 079,7837	52 148,1210	*
45	163,9876	363,6791	795,4438	1 716,6839	3 657,2620	7 694,7122	15 994,6902	32 860,5275	66 749,5949	*
46	183,6661	414,5941	922,7148	2 025,6870	4 388,7144	9 387,5489	19 833,4158	41 404,2646	85 439,4814	*
47	205,7061	472,6373	1 070,3492	2 390,3106	5 266,4573	11 452,8096	24 593,4356	52 169,3734	*	*
48	230,3908	538,8065	1 241,6051	2 820,5665	6 319,7487	13 972,4277	30 495,8602	65 733,4105	*	*
49	258,0377	614,2395	1 440,2619	3 328,2685	7 583,6985	17 046,3618	37 814,8666	82 824,0972	*	*
50	289,0022	700,2330	1 670,7038	3 927,3569	9 100,4382	20 796,5615	46 890,4346	*	*	*
52	362,5243	910,0228	2 248,0990	5 468,4517	13 104,6309	30 953,6021	72 098,7323	*	*	*
54	454,7505	1 182,6656	3 025,0421	7 614,2721	18 870,6685	46 071,3413	*	*	*	*
56	570,4391	1 536,9922	4 070,4966	10 602,1125	27 173,7627	68 572,5844	*	*	*	*
58	715,5588	1 997,4751	5 477,2602	14 762,3815	39 130,2183	*	*	*	*	*
60	897,5969	2 595,9187	7 370,2014	20 555,1400	56 347,5144	*	*	*	*	*
62	1 125,9456	3 373,6559	9 917,3430	28 620,9769	81 140,4207	*	*	*	*	*
64	1 412,3862	4 384,4032	13 344,7767	39 851,8482	*	*	*	*	*	*
66	1 771,6972	5 697,9704	17 956,7315	55 489,7135	*	*	*	*	*	*
68	2 222,4170	7 405,0823	24 162,5779	77 263,8770	*	*	*	*	*	*
70	2 787,7998	9 623,6450	32 513,1648	*	*	*	*	*	*	*

B.2. Factor de descuento compuesto unitario

$$(1+i)^{-n}$$

n	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394
16	0,8528	0,7284	0,6232	0,5339	0,4581	0,3936	0,3387	0,2919	0,2519	0,2176
17	0,8444	0,7142	0,6050	0,5134	0,4363	0,3714	0,3166	0,2703	0,2311	0,1978
18	0,8360	0,7002	0,5874	0,4936	0,4155	0,3503	0,2959	0,2502	0,2120	0,1799
19	0,8277	0,6864	0,5703	0,4746	0,3957	0,3305	0,2765	0,2317	0,1945	0,1635
20	0,8195	0,6730	0,5537	0,4564	0,3769	0,3118	0,2584	0,2145	0,1784	0,1486
21	0,8114	0,6598	0,5375	0,4388	0,3589	0,2942	0,2415	0,1987	0,1637	0,1351
22	0,8034	0,6468	0,5219	0,4220	0,3418	0,2775	0,2257	0,1839	0,1502	0,1228
23	0,7954	0,6342	0,5067	0,4057	0,3256	0,2618	0,2109	0,1703	0,1378	0,1117
24	0,7876	0,6217	0,4919	0,3901	0,3101	0,2470	0,1971	0,1577	0,1264	0,1015
25	0,7798	0,6095	0,4776	0,3751	0,2953	0,2330	0,1842	0,1460	0,1160	0,0923
26	0,7720	0,5976	0,4637	0,3607	0,2812	0,2198	0,1722	0,1352	0,1064	0,0839
27	0,7644	0,5859	0,4502	0,3468	0,2678	0,2074	0,1609	0,1252	0,0976	0,0763
28	0,7568	0,5744	0,4371	0,3335	0,2551	0,1956	0,1504	0,1159	0,0895	0,0693
29	0,7493	0,5631	0,4243	0,3207	0,2429	0,1846	0,1406	0,1073	0,0822	0,0630
30	0,7419	0,5521	0,4120	0,3083	0,2314	0,1741	0,1314	0,0994	0,0754	0,0573
31	0,7346	0,5412	0,4000	0,2965	0,2204	0,1643	0,1228	0,0920	0,0691	0,0521
32	0,7273	0,5306	0,3883	0,2851	0,2099	0,1550	0,1147	0,0852	0,0634	0,0474
33	0,7201	0,5202	0,3770	0,2741	0,1999	0,1462	0,1072	0,0789	0,0582	0,0431
34	0,7130	0,5100	0,3660	0,2636	0,1904	0,1379	0,1002	0,0730	0,0534	0,0391
35	0,7059	0,5000	0,3554	0,2534	0,1813	0,1301	0,0937	0,0676	0,0490	0,0356
36	0,6989	0,4902	0,3450	0,2437	0,1727	0,1227	0,0875	0,0626	0,0449	0,0323
37	0,6920	0,4806	0,3350	0,2343	0,1644	0,1158	0,0818	0,0580	0,0412	0,0294
38	0,6852	0,4712	0,3252	0,2253	0,1566	0,1092	0,0765	0,0537	0,0378	0,0267
39	0,6784	0,4619	0,3158	0,2166	0,1491	0,1031	0,0715	0,0497	0,0347	0,0243
40	0,6717	0,4529	0,3066	0,2083	0,1420	0,0972	0,0668	0,0460	0,0318	0,0221
41	0,6650	0,4440	0,2976	0,2003	0,1353	0,0917	0,0624	0,0426	0,0292	0,0201
42	0,6584	0,4353	0,2890	0,1926	0,1288	0,0865	0,0583	0,0395	0,0268	0,0183
43	0,6519	0,4268	0,2805	0,1852	0,1227	0,0816	0,0545	0,0365	0,0246	0,0166
44	0,6454	0,4184	0,2724	0,1780	0,1169	0,0770	0,0509	0,0338	0,0226	0,0151
45	0,6391	0,4102	0,2644	0,1712	0,1113	0,0727	0,0476	0,0313	0,0207	0,0137
46	0,6327	0,4022	0,2567	0,1646	0,1060	0,0685	0,0445	0,0290	0,0190	0,0125
47	0,6265	0,3943	0,2493	0,1583	0,1009	0,0647	0,0416	0,0269	0,0174	0,0113
48	0,6203	0,3865	0,2420	0,1522	0,0961	0,0610	0,0389	0,0249	0,0160	0,0103
49	0,6141	0,3790	0,2350	0,1463	0,0916	0,0575	0,0363	0,0230	0,0147	0,0094
50	0,6080	0,3715	0,2281	0,1407	0,0872	0,0543	0,0339	0,0213	0,0134	0,0085
52	0,5961	0,3571	0,2150	0,1301	0,0791	0,0483	0,0297	0,0183	0,0113	0,0070
54	0,5843	0,3432	0,2027	0,1203	0,0717	0,0430	0,0259	0,0157	0,0095	0,0058
56	0,5728	0,3299	0,1910	0,1112	0,0651	0,0383	0,0226	0,0134	0,0080	0,0048
58	0,5615	0,3171	0,1801	0,1028	0,0590	0,0341	0,0198	0,0115	0,0067	0,0040
60	0,5504	0,3048	0,1697	0,0951	0,0535	0,0303	0,0173	0,0099	0,0057	0,0033
62	0,5396	0,2929	0,1600	0,0879	0,0486	0,0270	0,0151	0,0085	0,0048	0,0027
64	0,5290	0,2816	0,1508	0,0813	0,0440	0,0240	0,0132	0,0073	0,0040	0,0022
66	0,5185	0,2706	0,1421	0,0751	0,0399	0,0214	0,0115	0,0062	0,0034	0,0019
68	0,5083	0,2601	0,1340	0,0695	0,0362	0,0190	0,0100	0,0053	0,0029	0,0015
70	0,4983	0,2500	0,1263	0,0642	0,0329	0,0169	0,0088	0,0046	0,0024	0,0013

$$(1+i)^{-n}$$

n	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,32
1	0,8929	0,8772	0,8621	0,8475	0,8333	0,8197	0,8065	0,7937	0,7813	0,7576
2	0,7972	0,7695	0,7432	0,7182	0,6944	0,6719	0,6504	0,6299	0,6104	0,5739
3	0,7118	0,6750	0,6407	0,6086	0,5787	0,5507	0,5245	0,4999	0,4768	0,4348
4	0,6355	0,5921	0,5523	0,5158	0,4823	0,4514	0,4230	0,3968	0,3725	0,3294
5	0,5674	0,5194	0,4761	0,4371	0,4019	0,3700	0,3411	0,3149	0,2910	0,2495
6	0,5066	0,4556	0,4104	0,3704	0,3349	0,3033	0,2751	0,2499	0,2274	0,1890
7	0,4523	0,3996	0,3538	0,3139	0,2791	0,2486	0,2218	0,1983	0,1776	0,1432
8	0,4039	0,3506	0,3050	0,2660	0,2326	0,2038	0,1789	0,1574	0,1388	0,1085
9	0,3606	0,3075	0,2630	0,2255	0,1938	0,1670	0,1443	0,1249	0,1084	0,0822
10	0,3220	0,2697	0,2267	0,1911	0,1615	0,1369	0,1164	0,0992	0,0847	0,0623
11	0,2875	0,2366	0,1954	0,1619	0,1346	0,1122	0,0938	0,0787	0,0662	0,0472
12	0,2567	0,2076	0,1685	0,1372	0,1122	0,0920	0,0757	0,0625	0,0517	0,0357
13	0,2292	0,1821	0,1452	0,1163	0,0935	0,0754	0,0610	0,0496	0,0404	0,0271
14	0,2046	0,1597	0,1252	0,0985	0,0779	0,0618	0,0492	0,0393	0,0316	0,0205
15	0,1827	0,1401	0,1079	0,0835	0,0649	0,0507	0,0397	0,0312	0,0247	0,0155
16	0,1631	0,1229	0,0930	0,0708	0,0541	0,0415	0,0320	0,0248	0,0193	0,0118
17	0,1456	0,1078	0,0802	0,0600	0,0451	0,0340	0,0258	0,0197	0,0150	0,0089
18	0,1300	0,0946	0,0691	0,0508	0,0376	0,0279	0,0208	0,0156	0,0118	0,0068
19	0,1161	0,0829	0,0596	0,0431	0,0313	0,0229	0,0168	0,0124	0,0092	0,0051
20	0,1037	0,0728	0,0514	0,0365	0,0261	0,0187	0,0135	0,0098	0,0072	0,0039
21	0,0926	0,0638	0,0443	0,0309	0,0217	0,0154	0,0109	0,0078	0,0056	0,0029
22	0,0826	0,0560	0,0382	0,0262	0,0181	0,0126	0,0088	0,0062	0,0044	0,0022
23	0,0738	0,0491	0,0329	0,0222	0,0151	0,0103	0,0071	0,0049	0,0034	0,0017
24	0,0659	0,0431	0,0284	0,0188	0,0126	0,0085	0,0057	0,0039	0,0027	0,0013
25	0,0588	0,0378	0,0245	0,0160	0,0105	0,0069	0,0046	0,0031	0,0021	0,0010
26	0,0525	0,0331	0,0211	0,0135	0,0087	0,0057	0,0037	0,0025	0,0016	0,0007
27	0,0469	0,0291	0,0182	0,0115	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0013	0,0006
28	0,0419	0,0255	0,0157	0,0097	0,0061	0,0038	0,0024	0,0015	0,0010	0,0004
29	0,0374	0,0224	0,0135	0,0082	0,0051	0,0031	0,0020	0,0012	0,0008	0,0003
30	0,0334	0,0196	0,0116	0,0070	0,0042	0,0026	0,0016	0,0010	0,0006	0,0002
31	0,0298	0,0172	0,0100	0,0059	0,0035	0,0021	0,0013	0,0008	0,0005	0,0002
32	0,0266	0,0151	0,0087	0,0050	0,0029	0,0017	0,0010	0,0006	0,0004	0,0001
33	0,0238	0,0132	0,0075	0,0042	0,0024	0,0014	0,0008	0,0005	0,0003	0,0001
34	0,0212	0,0116	0,0064	0,0036	0,0020	0,0012	0,0007	0,0004	0,0002	0,0001
35	0,0189	0,0102	0,0055	0,0030	0,0017	0,0009	0,0005	0,0003	0,0002	0,0001
36	0,0169	0,0089	0,0048	0,0026	0,0014	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000
37	0,0151	0,0078	0,0041	0,0022	0,0012	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000
38	0,0135	0,0069	0,0036	0,0019	0,0010	0,0005	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000
39	0,0120	0,0060	0,0031	0,0016	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
40	0,0107	0,0053	0,0026	0,0013	0,0007	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
41	0,0096	0,0046	0,0023	0,0011	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
42	0,0086	0,0041	0,0020	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
43	0,0076	0,0036	0,0017	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
44	0,0068	0,0031	0,0015	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
45	0,0061	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
46	0,0054	0,0024	0,0011	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
47	0,0049	0,0021	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
48	0,0043	0,0019	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
49	0,0039	0,0016	0,0007	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
50	0,0035	0,0014	0,0006	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
52	0,0028	0,0011	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
54	0,0022	0,0008	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
56	0,0018	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
58	0,0014	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
60	0,0011	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
62	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
64	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
66	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
68	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
70	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

B.3. Valor actual de una renta unitaria

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	1,9704	1,9416	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080	1,7833	1,7591	1,7355
3	2,9410	2,8839	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243	2,5771	2,5313	2,4869
4	3,9020	3,8077	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872	3,3121	3,2397	3,1699
5	4,8534	4,7135	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002	3,9927	3,8897	3,7908
6	5,7955	5,6014	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665	4,6229	4,4859	4,3553
7	6,7282	6,4720	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893	5,2064	5,0330	4,8684
8	7,6517	7,3255	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713	5,7466	5,5348	5,3349
9	8,5660	8,1622	7,7861	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152	6,2469	5,9952	5,7590
10	9,4713	8,9826	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236	6,7101	6,4177	6,1446
11	10,3676	9,7868	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987	7,1390	6,8052	6,4951
12	11,2551	10,5753	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427	7,5361	7,1607	6,8137
13	12,1337	11,3484	10,6350	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577	7,9038	7,4869	7,1034
14	13,0037	12,1062	11,2961	10,5631	9,8986	9,2950	8,7455	8,2442	7,7862	7,3667
15	13,8651	12,8493	11,9379	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079	8,5595	8,0607	7,6061
16	14,7179	13,5777	12,5611	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466	8,8514	8,3126	7,8237
17	15,5623	14,2919	13,1661	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632	9,1216	8,5436	8,0216
18	16,3983	14,9920	13,7535	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591	9,3719	8,7556	8,2014
19	17,2260	15,6785	14,3238	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356	9,6036	8,9501	8,3649
20	18,0456	16,3514	14,8775	13,5903	12,4622	11,4699	10,5940	9,8181	9,1285	8,5136
21	18,8570	17,0112	15,4150	14,0292	12,8212	11,7641	10,8355	10,0168	9,2922	8,6487
22	19,6604	17,6580	15,9369	14,4511	13,1630	12,0416	11,0612	10,2007	9,4424	8,7715
23	20,4558	18,2922	16,4436	14,8568	13,4886	12,3034	11,2722	10,3711	9,5802	8,8832
24	21,2434	18,9139	16,9355	15,2470	13,7986	12,5504	11,4693	10,5288	9,7066	8,9847
25	22,0232	19,5235	17,4131	15,6221	14,0939	12,7834	11,6536	10,6748	9,8226	9,0770
26	22,7952	20,1210	17,8768	15,9828	14,3752	13,0032	11,8258	10,8100	9,9290	9,1609
27	23,5596	20,7069	18,3270	16,3296	14,6430	13,2105	11,9867	10,9352	10,0266	9,2372
28	24,3164	21,2813	18,7641	16,6631	14,8981	13,4062	12,1371	11,0511	10,1161	9,3066
29	25,0658	21,8444	19,1885	16,9837	15,1411	13,5907	12,2777	11,1584	10,1983	9,3696
30	25,8077	22,3965	19,6004	17,2920	15,3725	13,7648	12,4090	11,2578	10,2737	9,4269
31	26,5423	22,9377	20,0004	17,5885	15,5928	13,9291	12,5318	11,3498	10,3428	9,4790
32	27,2696	23,4683	20,3888	17,8736	15,8027	14,0840	12,6466	11,4350	10,4062	9,5264
33	27,9897	23,9886	20,7658	18,1476	16,0025	14,2302	12,7538	11,5139	10,4644	9,5694
34	28,7027	24,4986	21,1318	18,4112	16,1929	14,3681	12,8540	11,5869	10,5178	9,6086
35	29,4086	24,9986	21,4872	18,6646	16,3742	14,4982	12,9477	11,6546	10,5668	9,6442
36	30,1075	25,4888	21,8323	18,9083	16,5469	14,6210	13,0352	11,7172	10,6118	9,6765
37	30,7995	25,9695	22,1672	19,1426	16,7113	14,7368	13,1170	11,7752	10,6530	9,7059
38	31,4847	26,4406	22,4925	19,3679	16,8679	14,8460	13,1935	11,8289	10,6908	9,7327
39	32,1630	26,9026	22,8082	19,5845	17,0170	14,9491	13,2649	11,8786	10,7255	9,7570
40	32,8347	27,3555	23,1148	19,7928	17,1591	15,0463	13,3317	11,9246	10,7574	9,7791
41	33,4997	27,7995	23,4124	19,9931	17,2944	15,1380	13,3941	11,9672	10,7866	9,7991
42	34,1581	28,2348	23,7014	20,1856	17,4232	15,2245	13,4524	12,0067	10,8134	9,8174
43	34,8100	28,6616	23,9819	20,3708	17,5459	15,3062	13,5070	12,0432	10,8380	9,8340
44	35,4555	29,0800	24,2543	20,5488	17,6628	15,3832	13,5579	12,0771	10,8605	9,8491
45	36,0945	29,4902	24,5187	20,7200	17,7741	15,4558	13,6055	12,1084	10,8812	9,8628
46	36,7272	29,8923	24,7754	20,8847	17,8801	15,5244	13,6500	12,1374	10,9002	9,8753
47	37,3537	30,2866	25,0247	21,0429	17,9810	15,5890	13,6916	12,1643	10,9176	9,8866
48	37,9740	30,6731	25,2667	21,1951	18,0772	15,6500	13,7305	12,1891	10,9336	9,8969
49	38,5881	31,0521	25,5017	21,3415	18,1687	15,7076	13,7668	12,2122	10,9482	9,9063
50	39,1961	31,4236	25,7298	21,4822	18,2559	15,7619	13,8007	12,2335	10,9617	9,9148
52	40,3942	32,1449	26,1662	21,7476	18,4181	15,8614	13,8621	12,2715	10,9853	9,9296
54	41,5687	32,8383	26,5777	21,9930	18,5651	15,9500	13,9157	12,3041	11,0053	9,9418
56	42,7200	33,5047	26,9655	22,2198	18,6985	16,0288	13,9626	12,3321	11,0220	9,9519
58	43,8486	34,1452	27,3310	22,4296	18,8195	16,0990	14,0035	12,3560	11,0361	9,9603
60	44,9550	34,7609	27,6756	22,6235	18,9293	16,1614	14,0392	12,3766	11,0480	9,9672
62	46,0396	35,3526	28,0003	22,8028	19,0288	16,2170	14,0704	12,3942	11,0580	9,9729
64	47,1029	35,9214	28,3065	22,9685	19,1191	16,2665	14,0976	12,4093	11,0664	9,9776
66	48,1452	36,4681	28,5950	23,1218	19,2010	16,3105	14,1214	12,4222	11,0735	9,9815
68	49,1669	36,9936	28,8670	23,2635	19,2753	16,3497	14,1422	12,4333	11,0794	9,9847
70	50,1685	37,4986	29,1234	23,3945	19,3427	16,3845	14,1604	12,4428	11,0844	9,9873

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

n	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,32
1	0,8929	0,8772	0,8621	0,8475	0,8333	0,8197	0,8065	0,7937	0,7813	0,7576
2	1,6901	1,6467	1,6052	1,5656	1,5278	1,4915	1,4568	1,4235	1,3916	1,3315
3	2,4018	2,3216	2,2459	2,1743	2,1065	2,0422	1,9813	1,9234	1,8684	1,7663
4	3,0373	2,9137	2,7982	2,6901	2,5887	2,4936	2,4043	2,3202	2,2410	2,0957
5	3,6048	3,4331	3,2743	3,1272	2,9906	2,8636	2,7454	2,6351	2,5320	2,3452
6	4,1114	3,8887	3,6847	3,4976	3,3255	3,1669	3,0205	2,8850	2,7594	2,5342
7	4,5638	4,2883	4,0386	3,8115	3,6046	3,4155	3,2423	3,0833	2,9370	2,6775
8	4,9676	4,6389	4,3436	4,0776	3,8372	3,6193	3,4212	3,2407	3,0758	2,7860
9	5,3282	4,9464	4,6065	4,3030	4,0310	3,7863	3,5655	3,3657	3,1842	2,8681
10	5,6502	5,2161	4,8332	4,4941	4,1925	3,9232	3,6819	3,4648	3,2689	2,9304
11	5,9377	5,4527	5,0286	4,6560	4,3271	4,0354	3,7757	3,5435	3,3351	2,9776
12	6,1944	5,6603	5,1971	4,7932	4,4392	4,1274	3,8514	3,6059	3,3868	3,0133
13	6,4235	5,8424	5,3423	4,9095	4,5327	4,2028	3,9124	3,6555	3,4272	3,0404
14	6,6282	6,0021	5,4675	5,0081	4,6106	4,2646	3,9616	3,6949	3,4587	3,0609
15	6,8109	6,1422	5,5755	5,0916	4,6755	4,3152	4,0013	3,7261	3,4834	3,0764
16	6,9740	6,2651	5,6685	5,1624	4,7296	4,3567	4,0333	3,7509	3,5026	3,0882
17	7,1196	6,3729	5,7487	5,2223	4,7746	4,3908	4,0591	3,7705	3,5177	3,0971
18	7,2497	6,4674	5,8178	5,2732	4,8122	4,4187	4,0799	3,7861	3,5294	3,1039
19	7,3658	6,5504	5,8775	5,3162	4,8435	4,4415	4,0967	3,7985	3,5386	3,1090
20	7,4694	6,6231	5,9288	5,3527	4,8696	4,4603	4,1103	3,8083	3,5458	3,1129
21	7,5620	6,6870	5,9731	5,3837	4,8913	4,4756	4,1212	3,8161	3,5514	3,1158
22	7,6446	6,7429	6,0113	5,4099	4,9094	4,4882	4,1300	3,8223	3,5558	3,1180
23	7,7184	6,7921	6,0442	5,4321	4,9245	4,4985	4,1371	3,8273	3,5592	3,1197
24	7,7843	6,8351	6,0726	5,4509	4,9371	4,5070	4,1428	3,8312	3,5619	3,1210
25	7,8431	6,8729	6,0971	5,4669	4,9476	4,5139	4,1474	3,8342	3,5640	3,1220
26	7,8957	6,9061	6,1182	5,4804	4,9563	4,5196	4,1511	3,8367	3,5656	3,1227
27	7,9426	6,9352	6,1364	5,4919	4,9636	4,5243	4,1542	3,8387	3,5669	3,1233
28	7,9844	6,9607	6,1520	5,5016	4,9697	4,5281	4,1566	3,8402	3,5679	3,1237
29	8,0218	6,9830	6,1656	5,5098	4,9747	4,5312	4,1585	3,8414	3,5687	3,1240
30	8,0552	7,0027	6,1772	5,5168	4,9789	4,5338	4,1601	3,8424	3,5693	3,1242
31	8,0850	7,0199	6,1872	5,5227	4,9824	4,5359	4,1614	3,8432	3,5697	3,1244
32	8,1116	7,0350	6,1959	5,5277	4,9854	4,5376	4,1624	3,8438	3,5701	3,1246
33	8,1354	7,0482	6,2034	5,5320	4,9878	4,5390	4,1632	3,8443	3,5704	3,1247
34	8,1566	7,0599	6,2098	5,5356	4,9898	4,5402	4,1639	3,8447	3,5706	3,1248
35	8,1755	7,0700	6,2153	5,5386	4,9915	4,5411	4,1644	3,8450	3,5708	3,1248
36	8,1924	7,0790	6,2201	5,5412	4,9929	4,5419	4,1649	3,8452	3,5709	3,1249
37	8,2075	7,0868	6,2242	5,5434	4,9941	4,5426	4,1652	3,8454	3,5710	3,1249
38	8,2210	7,0937	6,2278	5,5452	4,9951	4,5431	4,1655	3,8456	3,5711	3,1249
39	8,2330	7,0997	6,2309	5,5468	4,9959	4,5435	4,1657	3,8457	3,5712	3,1249
40	8,2438	7,1050	6,2335	5,5482	4,9966	4,5439	4,1659	3,8458	3,5712	3,1250
41	8,2534	7,1097	6,2358	5,5493	4,9972	4,5441	4,1661	3,8459	3,5713	3,1250
42	8,2619	7,1138	6,2377	5,5502	4,9976	4,5444	4,1662	3,8459	3,5713	3,1250
43	8,2696	7,1173	6,2394	5,5510	4,9980	4,5446	4,1663	3,8460	3,5713	3,1250
44	8,2764	7,1205	6,2409	5,5517	4,9984	4,5447	4,1663	3,8460	3,5714	3,1250
45	8,2825	7,1232	6,2421	5,5523	4,9986	4,5449	4,1664	3,8460	3,5714	3,1250
46	8,2880	7,1256	6,2432	5,5528	4,9989	4,5450	4,1665	3,8461	3,5714	3,1250
47	8,2928	7,1277	6,2442	5,5532	4,9991	4,5451	4,1665	3,8461	3,5714	3,1250
48	8,2972	7,1296	6,2450	5,5536	4,9992	4,5451	4,1665	3,8461	3,5714	3,1250
49	8,3010	7,1312	6,2457	5,5539	4,9993	4,5452	4,1666	3,8461	3,5714	3,1250
50	8,3045	7,1327	6,2463	5,5541	4,9995	4,5452	4,1666	3,8461	3,5714	3,1250
52	8,3103	7,1350	6,2472	5,5545	4,9996	4,5453	4,1666	3,8461	3,5714	3,1250
54	8,3150	7,1368	6,2479	5,5548	4,9997	4,5454	4,1666	3,8461	3,5714	3,1250
56	8,3187	7,1382	6,2485	5,5550	4,9998	4,5454	4,1666	3,8461	3,5714	3,1250
58	8,3217	7,1393	6,2489	5,5552	4,9999	4,5454	4,1667	3,8461	3,5714	3,1250
60	8,3240	7,1401	6,2492	5,5553	4,9999	4,5454	4,1667	3,8462	3,5714	3,1250
62	8,3259	7,1407	6,2494	5,5554	4,9999	4,5454	4,1667	3,8462	3,5714	3,1250
64	8,3274	7,1412	6,2495	5,5554	5,0000	4,5454	4,1667	3,8462	3,5714	3,1250
66	8,3286	7,1416	6,2497	5,5555	5,0000	4,5454	4,1667	3,8462	3,5714	3,1250
68	8,3296	7,1419	6,2497	5,5555	5,0000	4,5454	4,1667	3,8462	3,5714	3,1250
70	8,3303	7,1421	6,2498	5,5555	5,0000	4,5455	4,1667	3,8462	3,5714	3,1250

B.4. Valor final de una renta unitaria

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,0100	2,0200	2,0300	2,0400	2,0500	2,0600	2,0700	2,0800	2,0900	2,1000
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836	3,2149	3,2464	3,2781	3,3100
4	4,0604	4,1216	4,1836	4,2465	4,3101	4,3746	4,4399	4,5061	4,5731	4,6410
5	5,1010	5,2040	5,3091	5,4163	5,5256	5,6371	5,7507	5,8666	5,9847	6,1051
6	6,1520	6,3081	6,4684	6,6330	6,8019	6,9753	7,1533	7,3359	7,5233	7,7156
7	7,2135	7,4343	7,6625	7,8983	8,1420	8,3938	8,6540	8,9228	9,2004	9,4872
8	8,2857	8,5830	8,8923	9,2142	9,5491	9,8975	10,2598	10,6366	11,0285	11,4359
9	9,3685	9,7546	10,1591	10,5828	11,0266	11,4913	11,9780	12,4876	13,0210	13,5795
10	10,4622	10,9497	11,4639	12,0061	12,5779	13,1808	13,8164	14,4866	15,1929	15,9374
11	11,5668	12,1687	12,8078	13,4864	14,2068	14,9716	15,7836	16,6455	17,5603	18,5312
12	12,6825	13,4121	14,1920	15,0258	15,9171	16,8699	17,8885	18,9771	20,1407	21,3843
13	13,8093	14,6803	15,6178	16,6268	17,7130	18,8821	20,1406	21,4953	22,9534	24,5227
14	14,9474	15,9739	17,0863	18,2919	19,5986	21,0151	22,5505	24,2149	26,0192	27,9750
15	16,0969	17,2934	18,5989	20,0236	21,5786	23,2760	25,1290	27,1521	29,3609	31,7725
16	17,2579	18,6393	20,1569	21,8245	23,6575	25,6725	27,8881	30,3243	33,0034	35,9497
17	18,4304	20,0121	21,7616	23,6975	25,8404	28,2129	30,8402	33,7502	36,9737	40,5447
18	19,6147	21,4123	23,4144	25,6454	28,1324	30,9057	33,9990	37,4502	41,3013	45,5992
19	20,8109	22,8406	25,1169	27,6712	30,5390	33,7600	37,3790	41,4463	46,0185	51,1591
20	22,0190	24,2974	26,8704	29,7781	33,0660	36,7856	40,9955	45,7620	51,1601	57,2750
21	23,2392	25,7833	28,6765	31,9692	35,7193	39,9927	44,8652	50,4229	56,7645	64,0025
22	24,4716	27,2990	30,5368	34,2480	38,5052	43,3923	49,0057	55,4568	62,8733	71,4027
23	25,7163	28,8450	32,4529	36,6179	41,4305	46,9958	53,4361	60,8933	69,5319	79,5430
24	26,9735	30,4219	34,4265	39,0826	44,5020	50,8156	58,1767	66,7648	76,7898	88,4973
25	28,2432	32,0303	36,4593	41,6459	47,7271	54,8645	63,2490	73,1059	84,7009	98,3471
26	29,5256	33,6709	38,5530	44,3117	51,1135	59,1564	68,6765	79,9544	93,3240	109,1818
27	30,8209	35,3443	40,7096	47,0842	54,6691	63,7058	74,4838	87,3508	102,7231	121,0999
28	32,1291	37,0512	42,9309	49,9676	58,4026	68,5281	80,6977	95,3388	112,9682	134,2099
29	33,4504	38,7922	45,2189	52,9663	62,3227	73,6398	87,3465	103,9659	124,1354	148,6309
30	34,7849	40,5681	47,5754	56,0849	66,4388	79,0582	94,4608	113,2832	136,3075	164,4940
31	36,1327	42,3794	50,0027	59,3283	70,7608	84,8017	102,0730	123,3459	149,5752	181,9434
32	37,4941	44,2270	52,5028	62,7015	75,2988	90,8898	110,2182	134,2135	164,0370	201,1378
33	38,8690	46,1116	55,0778	66,2095	80,0638	97,3432	118,9334	145,9506	179,8003	222,2515
34	40,2577	48,0338	57,7302	69,8579	85,0670	104,1838	128,2588	158,6267	196,9823	245,4767
35	41,6603	49,9945	60,4621	73,6522	90,3203	111,4348	138,2369	172,3168	215,7108	271,0244
36	43,0769	51,9944	63,2759	77,5983	95,8363	119,1209	148,9135	187,1021	236,1247	299,1268
37	44,5076	54,0343	66,1742	81,7022	101,6281	127,2681	160,3374	203,0703	258,3759	330,0395
38	45,9527	56,1149	69,1594	85,9703	107,7095	135,9042	172,5610	220,3159	282,6298	364,0434
39	47,4123	58,2372	72,2342	90,4091	114,0950	145,0585	185,6403	238,9412	309,0665	401,4478
40	48,8864	60,4020	75,4013	95,0255	120,7998	154,7620	199,6351	259,0565	337,8824	442,5926
41	50,3752	62,6100	78,6633	99,8265	127,8398	165,0477	214,6096	280,7810	369,2919	487,8518
42	51,8790	64,8622	82,0232	104,8196	135,2318	175,9505	230,6322	304,2435	403,5281	537,6370
43	53,3978	67,1595	85,4839	110,0124	142,9933	187,5076	247,7765	329,5830	440,8457	592,4007
44	54,9318	69,5027	89,0484	115,4129	151,1430	199,7580	266,1209	356,9496	481,5218	652,6408
45	56,4811	71,8927	92,7199	121,0294	159,7002	212,7435	285,7493	386,5056	525,8587	718,9048
46	58,0459	74,3306	96,5015	126,8706	168,6852	226,5081	306,7518	418,4261	574,1860	791,7953
47	59,6263	76,8172	100,3965	132,9454	178,1194	241,0986	329,2244	452,9002	626,8628	871,9749
48	61,2226	79,3535	104,4084	139,2632	188,0254	256,5645	353,2701	490,1322	684,2804	960,1723
49	62,8348	81,9406	108,5406	145,8337	198,4267	272,9584	378,9990	530,3427	746,8656	1 057,1896
50	64,4632	84,5794	112,7969	152,6671	209,3480	290,3359	406,5289	573,7702	815,0836	1 163,9085
52	67,7689	90,0164	121,6962	167,1647	232,8562	328,2814	467,5050	671,3255	970,4908	1 410,4293
54	71,1410	95,6731	131,1375	182,8454	258,7739	370,9170	537,3164	785,1141	1 155,1301	1 708,7195
56	74,5810	101,5583	141,1538	199,8055	287,3482	418,8223	617,2436	917,8371	1 374,5001	2 069,6506
58	78,0901	107,6812	151,7800	218,1497	318,8514	472,6488	708,7522	1 072,6451	1 635,1335	2 506,3772
60	81,6697	114,0515	163,0534	237,9907	353,5837	533,1282	813,5204	1 253,2133	1 944,7921	3 034,8164
62	85,3212	120,6792	175,0134	259,4507	391,8760	601,0828	933,4695	1 463,8280	2 312,6975	3 674,2278
64	89,0462	127,5747	187,7017	282,6619	434,0933	677,4367	1 070,7992	1 709,4890	2 749,8059	4 447,9157
66	92,8460	134,7487	201,1627	307,7671	480,6379	763,2278	1 228,0280	1 996,0279	3 269,1344	5 384,0780
68	96,7222	142,2125	215,4436	334,9209	531,9533	859,6228	1 408,0393	2 330,2470	3 886,1486	6 516,8344
70	100,6763	149,9779	230,5941	364,2905	588,5285	967,9322	1 614,1342	2 720,0801	4 619,2232	7 887,4696

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,32
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,1200	2,1400	2,1600	2,1800	2,2000	2,2200	2,2400	2,2600	2,2800	2,3200
3	3,3744	3,4396	3,5056	3,5724	3,6400	3,7084	3,7776	3,8476	3,9184	4,0624
4	4,7793	4,9211	5,0665	5,2154	5,3680	5,5242	5,6842	5,8480	6,0156	6,3624
5	6,3528	6,6101	6,8771	7,1542	7,4416	7,7396	8,0484	8,3684	8,6999	9,3983
6	8,1152	8,5355	8,9775	9,4420	9,9299	10,4423	10,9801	11,5442	12,1359	13,4058
7	10,0890	10,7305	11,4139	12,1415	12,9159	13,7396	14,6153	15,5458	16,5339	18,6956
8	12,2997	13,2328	14,2401	15,3270	16,4991	17,7623	19,1229	20,5876	22,1634	25,6782
9	14,7757	16,0853	17,5185	19,0859	20,7989	22,6700	24,7125	26,9404	29,3692	34,8953
10	17,5487	19,3373	21,3215	23,5213	25,9587	28,6574	31,6434	34,9449	38,5926	47,0618
11	20,6546	23,0445	25,7329	28,7551	32,1504	35,9620	40,2379	45,0306	50,3985	63,1215
12	24,1331	27,2707	30,8502	34,9311	39,5805	44,8737	50,8950	57,7386	65,5100	84,3204
13	28,0291	32,0887	36,7862	42,2187	48,4966	55,7459	64,1097	73,7506	84,8529	112,3030
14	32,3926	37,5811	43,6720	50,8180	59,1959	69,0100	80,4961	93,9258	109,6117	149,2399
15	37,2797	43,8424	51,6595	60,9653	72,0351	85,1922	100,8151	119,3465	141,3029	197,9967
16	42,7533	50,9804	60,9250	72,9390	87,4421	104,9345	126,0108	151,3766	181,8677	262,3557
17	48,8837	59,1176	71,6730	87,0680	105,9306	129,0201	157,2534	191,7345	233,7907	347,3095
18	55,7497	68,3941	84,1407	103,7403	128,1167	158,4045	195,9942	242,5855	300,2521	459,4485
19	63,4397	78,9692	98,6032	123,4135	154,7400	194,2535	244,0328	306,6577	385,3227	607,4721
20	72,0524	91,0249	115,3797	146,6280	186,6880	237,9893	303,6006	387,3887	494,2131	802,8631
21	81,6987	104,7684	134,8405	174,0210	225,0256	291,3469	377,4648	489,1098	633,5927	1 060,7793
22	92,5026	120,4360	157,4150	206,3448	271,0307	356,4432	469,0563	617,2783	811,9987	1 401,2287
23	104,6029	138,2970	183,6014	244,4868	326,2369	435,8607	582,6298	778,7707	1 040,3583	1 850,6219
24	118,1552	158,6586	213,9776	289,4945	392,4842	532,7501	723,4610	982,2511	1 332,6586	2 443,8209
25	133,3339	181,8708	249,2140	342,6035	471,9811	650,9551	898,0916	1 238,6363	1 706,8031	3 226,8436
26	150,3339	208,3327	290,0883	405,2721	567,3773	795,1653	1 114,6336	1 561,6818	2 185,7079	4 260,4336
27	169,3740	238,4993	337,5024	479,2211	681,8528	971,1016	1 383,1457	1 968,7191	2 798,7061	5 624,7723
28	190,6989	272,8892	392,5028	566,4809	819,2233	1 185,7440	1 716,1007	2 481,5860	3 583,3438	7 425,6994
29	214,5828	312,0937	456,3032	669,4475	984,0680	1 447,6077	2 128,9648	3 127,7984	4 587,6801	9 802,9233
30	241,3327	356,7868	530,3117	790,9480	1 181,8816	1 767,0813	2 640,9164	3 942,0260	5 873,2306	12 940,8587
31	271,2926	407,7370	616,1616	934,3186	1 419,2579	2 156,8392	3 275,7363	4 967,9527	7 518,7351	17 082,9335
32	304,8477	465,8202	715,7475	1 103,4960	1 704,1095	2 632,3439	4 062,9130	6 260,6204	9 624,9810	22 550,4722
33	342,4294	532,0350	831,2671	1 303,1253	2 045,9314	3 212,4595	5 039,0122	7 889,3817	12 320,9756	29 767,6233
34	384,5210	607,5199	965,2698	1 538,6878	2 456,1176	3 920,2006	6 249,3751	9 941,6210	15 771,8488	39 294,2628
35	431,6635	693,5727	1 120,7130	1 816,6516	2 948,3411	4 783,6447	7 750,2251	12 527,4424	20 188,9665	51 869,4269
36	484,4631	791,6729	1 301,0270	2 144,6489	3 539,0094	5 837,0466	9 611,2791	15 785,5774	25 842,8771	68 468,6435
37	543,5987	903,5071	1 510,1914	2 531,6857	4 247,8112	7 122,1968	11 918,9861	19 890,8276	33 079,8826	90 379,6094
38	609,8305	1 030,9981	1 752,8220	2 988,3891	5 098,3735	8 690,0801	14 780,5428	25 063,4428	42 343,2498	*
39	684,0102	1 176,3378	2 034,2735	3 527,2992	6 119,0482	10 602,8978	18 328,8731	31 580,9379	54 200,3597	*
40	767,0914	1 342,0251	2 360,7572	4 163,2130	7 343,8578	12 936,5353	22 728,8026	39 792,9817	69 377,4604	*
41	860,1424	1 530,9086	2 739,4784	4 913,5914	8 813,6294	15 783,5730	28 184,7152	50 140,1570	88 804,1494	*
42	964,3595	1 746,2358	3 178,7949	5 799,0378	10 577,3553	19 256,9591	34 950,0469	63 177,5978	*	*
43	1 081,0826	1 991,7088	3 688,4021	6 843,8646	12 693,8263	23 494,4901	43 339,0581	79 604,7732	*	*
44	1 211,8125	2 271,5481	4 279,5465	8 076,7603	15 233,5916	28 664,2779	53 741,4321	*	*	*
45	1 358,2300	2 590,5648	4 965,2739	9 531,5771	18 281,3099	34 971,4191	66 640,3758	*	*	*
46	1 522,2176	2 954,2439	5 760,7177	11 248,2610	21 938,5719	42 666,1312	82 635,0660	*	*	*
47	1 705,8838	3 368,8380	6 683,4326	13 273,9480	26 327,2863	52 053,6801	*	*	*	*
48	1 911,5898	3 841,4753	7 753,7818	15 664,2586	31 593,7436	63 506,4897	*	*	*	*
49	2 141,9806	4 380,2819	8 995,3869	18 484,8251	37 913,4923	77 478,9175	*	*	*	*
50	2 400,0182	4 994,5213	10 435,6488	21 813,0937	45 497,1908	94 525,2793	*	*	*	*
52	3 012,7029	6 493,0199	14 044,3690	30 374,7316	65 518,1547	*	*	*	*	*
54	3 781,2545	8 440,4687	18 900,2629	42 295,9563	94 348,3427	*	*	*	*	*
56	4 745,3257	10 971,3731	25 434,3538	58 895,0696	*	*	*	*	*	*
58	5 954,6565	14 260,5365	34 226,6264	82 007,6749	*	*	*	*	*	*
60	7 471,6411	18 535,1333	46 057,5085	*	*	*	*	*	*	*
62	9 374,5466	24 090,3992	61 977,1435	*	*	*	*	*	*	*
64	11 761,5513	31 310,0228	83 398,6043	*	*	*	*	*	*	*
66	14 755,8099	40 692,6457	*	*	*	*	*	*	*	*
68	18 511,8080	52 886,3023	*	*	*	*	*	*	*	*
70	23 223,3319	68 733,1785	*	*	*	*	*	*	*	*

Bibliografía

[1] Adolfo Aparicio Rozas. *Cálculo financiero. Teoría y ejercicios.* AC, 2006, ISBN 9788472881662.

[2] Carlos Arranz García. *Operaciones financieras.* CEF, 1985, ISBN 848574232X.

[3] Enrique R. Blanco Richart. *Manual práctico de operaciones financieras.* http://www.eumed.net/libros/2008/423/index.htm, 2008, ISBN 9788469163344.

[4] Bolsa de Madrid. *Curso de introducción a la Bolsa.* BM, 1987, ISBN 8450565241.

[5] Xavier Brun Lozano, Oscar Elvira Benito, Xavier Puig Pla. *Matemática financiera y estadística básica.* Profit, 2008, ISBN 9788496998674.

[6] Jesús M.ª Cristóbal Zubizarreta. *Fundamentos de financiación de la empresa.* Centro de Estudios Ramón Areces, 1997, ISBN 848004196X.

[7] José Alberto Parejo Gamir, Luis Rodríguez Saiz, Antonio Calvo Bernardino, Álvaro Cuervo García. *Manual del sistema financiero español.* Ariel, 2010, ISBN 9788434404915.

[8] María Angeles Gil Luezas. *Matemáticas de las operaciones financieras.* UNED, 1987, ISBN 843622017X.

[9] Lorenzo Gil Peláez. *Matemática de las operaciones financieras.* AC, 1987, ISBN 8472881237.

[10] Vicente T. González Catalá. *Introducción a las operaciones financieras, bancarias y bursátiles.* Tebar Flores, 1984, ISBN 8473600592.

[11] William M. Kolb. *Curve Fitting for programable calculators.* Syntec Inc., 1984, ISBN 0943494028.

[12] Zbigniew Kozikowski. *Matemáticas financieras. El valor del dinero en el tiempo.* Mc Graw Hill, 2007, ISBN 9789701060612.

[13] Javier Miner Aranzábal. *Curso de matemática financiera.* Mc Graw Hill, 2008, ISBN 9788448161002.

[14] Eliseo Navarro y Juan M. Nave. *Fundamentos de matemáticas financieras.* Antoni Bosch, 2001, ISBN 8495348012.

[15] Andrés de Pablo López. *Matemática de las operaciones financieras.* UNED, 1989, ISBN 8436222075.

[16] Andrés de Pablo López. *Gestión financiera.* Ramón Areces, 2010, ISBN 9788499610092.

[17] Francisco Prieto Pérez, Antonio José Carranceja y López de Ochoa. *Problemas de matemáticas financieras resueltos en hoja de cálculo.* Lex Nova, 1991, ISBN 8475574122.

[18] William F. Sharpe. *Teoría de cartera y del mercado de capitales.* Deusto, 1974, ISBN 8423402150.

[19] Andrés S. Suárez Suárez. *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa.* Pirámide, 1980, ISBN 8436800427.

[20] Hewlett-Packard. *Paquete de decisiones financieras.* Hewlett-Packard, 1980, P/N 00041-90162.

Índice alfabético

acciones, 150
Achard, 124
adquisición de la letra en el mercado secundario, 161
adquisición inicial de la letra y mantenimiento del título hasta su vencimiento, 160
adquisición inicial de la letra y venta en el mercado secundario, 161
aleatoria, 56
amortización
    fraccionados, 122
anticipada, 57
arrendamiento financiero, 137

beneficios constantes, 159

capital financiero, 2
capital propio, 152
capitalización, 8
    compuesta, 40
    continua, 46
    simple, 8
capitalización compuesta, 40
capitalización continua, 46
capitalización simple, 8
capitalizacion compuesta en tiempo fraccionario, 45
carencia, 122
cierta, 56
clasificación, 56
comparación del precio teórico con el de mercado, 154
comparación entre la capitalización simple y compuesta, 42
compra en el mercado y mantenimiento del título hasta su amortización, 156
compra en el mercado y venta en el mercado, 156
compra por suscripción y mantenimiento del título hasta su amortización, 155
compra por suscripción y venta del título en el mercado, 155
constantes, 57
constitución, 105
    elementos, 105
    imposiciones constantes, 105
    método progresivo, 105
contabilización del préstamo, 117, 118
continua, 56
convenio exponencial, 45
convenio lineal, 45
crédito bancario, 136
crédito comercial, 20, 136
créditos en cuenta corriente, 30
criterios de selección de inversiones, 86
cuenta corriente, 25, 137
cuenta de crédito, 30, 137
cuentas corrientes, 25
    a interés no recíproco, 28
    a interés recíproco y variable, 27
    a la vista, 28
    clases, 26
    métodos para obtener el saldo, 26
cuentas de ahorro, 29
cupones, 151

descuento
    compuesto, 40
    simple, 8
descuento comercial, 137
descuento bancario, 21, 137
    efectos comerciales, 21
    facturas de descuento, 24
    límite, 24
    letras impagadas, 25
    letras persiana, 24
    réditos, 22
    réditos para el banco, 22
    réditos para el cliente, 23
    tantos efectivos, 22
    tantos efectivos para el banco, 22
    tantos efectivos para el cliente, 23
descuento comercial, 21
descuento comercial compuesto, 47
descuento compuesto, 40, 47
descuento de efectos comerciales, 21
descuento de letras persiana, 24
descuento financiero, 25, 137
descuento racional compuesto, 47
descuento simple, 8
    métodos abreviados, 12
    magnitudes derivadas, 11
    tanto, 11
    tiempo, 11
descuento simple comercial, 11
descuento simple racional, 13
deuda pública, 150
deudas empresariales a corto plazo, 136
deudas empresariales a largo plazo, 136

deudas empresariales a medio plazo, 136
diferida, 57
discreta, 56
dividendo
  activo, 151
  pasivo, 151
dividendo activo, 151
dividendo pasivo, 151
dividendos, 151
dividendos constantes, 158
divisores fijos, 11
duración, 56

ecuación de los tantos equivalentes, 43
ecuaciones, 174, 176, 177
elementos que intervienen en los empréstitos, 141
empréstitos
  con cancelación escalonada, 140
  cupón cero, 144
  elementos que intervienen, 141
  introducción, 139
  método francés, 141
  normal, 141
  problemática, 140
  sin cancelación escalonada, 140
equilibrio financiero, 30
equivalencia de tantos, 43
equivalencia de tantos en capitalización compuesta, 43
equivalencia financiera, 4
Excel
  NPER, 90
  PAGO, 90
  TASA, 90
  TIR, 90
  VA, 90
  VF, 90
  VNA, 90

fórmula de Achard, 124
factor de actualización compuesta, 41
factor de actualización compuesto unitario, 182
factor de capitalización compuesta, 40
factor de capitalización compuesta unitaria, 180
factor de capitalización simple, 8
factor de descuento compuesto unitario, 182
facturas de descuento, 24
fenómeno financiero, 2
financiación
  a corto plazo, 136
  a largo plazo, 136
  a medio plazo, 136
  empresa, 136
  externa, 136
financiación de la empresa, 136
financiación externa, 152
financiación externa de la empresa, 136
financiación interna, 152
formación de capital, 105
fuerza de interés, 46

HP12c
  cálculo de intereses en capitalización simple, 9
  cálculo de la amortización acumulada, 116
  cálculo de la mensualidad, 115
  cálculo de los intereses de un préstamo, 116
  cálculo del capital final en capitalización simple, 9
  cálculo del interés efectivo de un préstamo, 92
  cálculo del tiempo, 42
  cálculo del tipo de interés, 42
  cálculo del tipo de interés (capitalización continua), 46
  cálculo del valor actual, 41
  cálculo del valor final, 41, 44
  cálculo del valor final (convenio exponencial), 45
  cálculo del valor final (convenio lineal), 45
  cálculo del valor final prepagable, 107
  conversión del tipo de interés, 44, 77
  obtención del cuadro de amortización, 116
  tiempo en una renta pospagable, 67
  tipo de interés en una renta pospagable, 68
  valor actual de una renta, 60
  valor actual de una renta fraccionada, 77
  valor actual de una renta prepagable, 63
  valor actual de una renta prepagable diferida, 65
  valor final de una renta, 60
  valor final de una renta pospagable anticipada, 66
  valor final de una renta prepagable, 63

inmediata, 57
interés compuesto, 40
  magnitudes derivadas, 41
  tanto, 41
  tiempo, 41
  tipo de interés, 41
  valor actual, 41
interés simple, 8
  métodos abreviados, 10
  magnitudes derivadas, 9
  tiempo, 9
  valor actual, 9
interés variable, 122, 123
intereses, 151
intereses anticipados, 10
interpolación lineal, 169

límite de descuento, 24

leasing, 137
    valoración, 137
letras financieras, 150
letras del tesoro, 32
letras impagadas, 25
logaritmos, 168

método de igualación, 175
método de los saldos, 27
método de Newton, 88
método de reducción, 175, 176
método de sustitución, 174, 176
método directo, 27
método escalar, 27
método hamburgués, 27
método indirecto, 27
métodos para obtener el saldo, 26
mercado de capitales, 150, 152
mercado de dinero, 152
mercado de valores, 150, 152
mercado financiero, 150
mercado primario, 152
mercado secundario, 152
multiplicadores fijos, 10

NPER, 90
nuda propiedad, 123

obligaciones, 150
operación de constitución, 105
operación financiera, 2
    clasificación, 5
    contraprestación, 3, 4
    duración, 3
    final, 3, 4
    origen, 3, 4
    prestación, 3, 4
operaciones a corto plazo, 20
operaciones de constitución, 105
origen, 56
otros activos financieros, 32

póliza de crédito, 30
pagarés de empresa, 150
pagarés del tesoro, 150
PAGO, 90
payback, 87
paycash, 87
PER, 158
período, 56
período uniforme, 56
perpetua, 57
plazo, 56
plazo de recuperación, 86, 87
porcentajes, 168
pospagables, 57
postulado de equivalencia financiera, 3
PR, 86
préstamo francés, 112
    anualidad, 113
    capital amortizado, 114
    capital pendiente, 114
    cuadro de amortizacion, 115
    cuota de amortización, 114
préstamos, 105
    alemán, 120
    americano, 111
    americano con fondo de amortización, 112
    anticipativenzisen, 120
    cancelación anticipada, 110
    cancelación anticipada parcial, 110
    carencia, 122
    clasificación, 107, 109
    contabilización, 116
    cuota constante, 119
    cuota de capital constante, 119
    elemental, 109
    elementos, 108
    europa central, 120
    fórmula de Achard, 124
    fraccionados, 122
    francés, 112
    interés variable, 122
    intereses anticipados, 120
    método italiano, 119
    nuda propiedad, 123
    progresión aritmética, 119
    progresión geométrica, 118
    reembolso único, 109
    reembolso único y pago periódico de intereses, 111
    simple, 109
    sinking fund, 112
    términos amortizativos constantes, 112
    términos en progresión aritmética, 119
    términos en progresión geométrica, 118
    tanto efectivo, 116
    tipo de interés, 108, 116
    usufructo, 123
    valor financiero, 123
prepagables, 57
prestatario, 116
price earning ratio, 158
progresiones
    aritméticas, 170
    geométricas, 172
    producto de dos términos equidistantes de los extremos, 172
    producto de los términos de una progresión geométrica limitada, 173
    suma de los términos, 171
    suma de los términos de una progresión geométrica limitada, 173
    suma de términos equidistantes de los extremos, 171
    término medio, 171, 172
progresiones aritméticas, 170
progresiones geométricas, 172
proporciones, 166, 168
proyección financiera, 5

réditos efectivos, 22
razones, 166

operaciones, 166
razones y proporciones, 166
relación entre el valor actual y el valor final, 60, 62
renta
pospagable, 57
prepagable, 57
anticipada, 57
constante, 57
continua, 56
perpetua, 57
temporal, 57
variable, 57
aleatoria, 56
anticipada, 66
cierta, 56
concepto, 56
constante, 58, 61, 63
diferida, 57, 64
discreta, 56
ecuación, 79
inmediata, 57, 58, 61, 63
perpetua, 63
pospagable, 58, 63
prepagable, 61, 63
temporal, 58, 61
unitarias, 57
valor capital, 57
valor financiero, 57
rentabilidad
bruta, 152
efectiva, 153
neta, 153
nominal, 153
rentabilidad de los títulos valores, 152
rentabilidad efectiva bruta, 153
rentabilidad efectiva neta, 153
rentabilidad nominal bruta, 153
rentabilidad nominal neta, 153
rentas
determinación de i, 66
determinación de n, 66
financieras, 56
financieras fraccionadas, 76
fraccionadas, 76, 78
variables, 76
rentas financieras, 56
fraccionadas, 76
variables, 76
rentas financieras fraccionadas y variables, 76
rentas variables, 79, 82, 85, 86
en general, 86
fraccionadas, 85
progresión aritmética, 82
progresión geométrica, 79
rentas variables fraccionadas
progresión aritmética, 85
progresión geométrica, 85
renting, 137
reserva matemática, 30
resolución de ecuaciones de segundo grado, 177
resolución de ecuaciones lineales, 174, 176
resolución de un sistema de dos ecuaciones, 174
resolución de un sistema de tres ecuaciones, 176

saldo financiero, 30
sistema de ecuaciones, 174, 176

término, 56
títulos de crédito, 150
títulos valores: conceptos, 151
títulos valores: operaciones bursátiles, 150
títulos valores: valores mobiliarios, 150
títulos valores
dividendos, 151
valor efectivo, 151
valor nominal, 151
intereses, 151
valor de reembolso, 151
valor de amortización, 151
valor de cotización, 151
tablas financieras
factor de actualización compuesto, 182
factor de actualización unitario, 182
factor de capitalización compuesta, 180
factor de capitalización compuesta unitaria, 180
factor de capitalización unitario, 180
factor de descuento compuesto, 182
factor de descuento compuesto unitario, 182
valor actual, 184
valor actual de una renta unitaria, 184
valor final, 186
valor final de una renta unitaria, 186
TAE, 44
tanto de descuento equivalente, 13, 48
tanto de interés equivalente, 13, 48
tanto efectivo, 116
prestatario, 116
tanto efectivo anual, 43
tanto medio de rentabilidad, 86
tanto nominal, 44
tantos efectivos, 22
TASA, 90
tasa de retorno, 87
tasa interna de retorno, 87
temporal, 57
tesoro público, 32
letras, 32
TIN, 44
tipo de interés, 108
componentes, 109
tipo efectivo, 116
TIR, 87, 90, 116
TMR, 86

unitarias, 57
usufructo, 123

VA, 90
valor, 56
valor actual, 56, 58, 61, 63, 64
valor actual de una renta unitaria, 184
valor actual neto, 87
valor capital, 87
valor de cotización, 151
valor de reembolso, 151
valor de amortización, 151
valor de cotización, 154
valor de mercado de un título, 154
valor efectivo, 151
valor final, 56, 59, 61
valor final de una renta unitaria, 186
valor financiero, 123
valor financiero de la nuda propiedad, 123
valor financiero del préstamo, 123
valor financiero del usufructo, 123
valor nominal, 151
valor teórico de un título, 154
valoración
    activo neto, 157
    beneficios, 157, 159
    dividendos, 157
    letras financieras, 160
    regresión, 157
valoración a partir del activo neto, 157
valoración a través de modelos de regresión, 157
valoración de las acciones, 157
valoración de las letras financieras, 160
valoración de los títulos
    renta fija, 154
valoración de los títulos de renta fija, 154
valoración de los títulos valores, 154
valoración en función de los beneficios, 157, 159
valoración en función de los dividendos, 157
valores mobiliarios, 150
    acciones, 150
    deuda pública, 150
    letras financieras, 150
    obligaciones, 150
    pagarés de empresa, 150
    pagarés del tesoro, 150
VAN, 87, 90
variables, 57
vencimiento común, 31
vencimiento medio, 31
VF, 90
VNA, 87, 90

Las matemáticas de las operaciones financieras han adquirido en los últimos cuarenta años una estructura formal. La primera formulación se debe a la Escuela Italiana, con los profesores F. Insolera, F. P. Cantelli, F. Sibirani, B. Finetti, G. Ottaniani, etc.

La influencia de la Escuela Italiana en occidente es muy importante y así lo recogen profesores como A. Vegas Pérez, J. Lóbez de Urquía y U. Nieto de Alba.

En particular, L. Gil Peláez, plantea el concepto de *capital financiero* como una magnitud bidimensional, la cuantía de capital y el tiempo.

E. Prieto Pérez introduce el comportamiento racional de los agentes económicos del mundo financiero y establece las *relaciones de preferencia y equivalencia financiera*.

Con la introducción del concepto de operación financiera como intercambio no simultáneo de capitales se procede al estudio de las operaciones financieras (simples, compuestas, a corto y largo plazo).